Massa Electromagnética

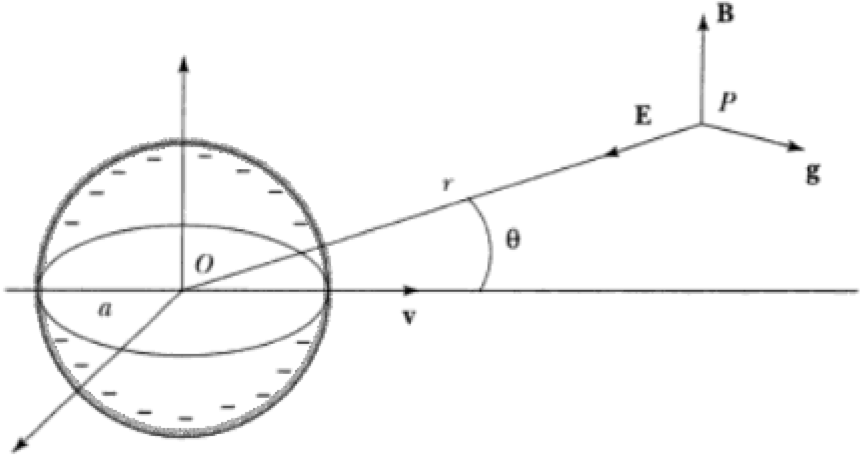
Josif Frenkel – Seção 4.7

(Aplicação da densidade de momento do campo eletromagnético $\vec{g}$)

Elétron modelado como uma carga q, distribuída uniformemente em uma superfície esférica de raio a, e se movendo com velocidade uniforme $\vec{v}$; $|\vec{v}| \ll c$.

Calcular:

1. Corrente de deslocamento $\vec{J}_d$ correspondente à variação do campo produzido pelo elétron, em um ponto fixo do espaço.
2. Campo magnético associado a esta corrente.
3. Momento total $\vec{p}_t$ dos campos produzidos pelo elétron.



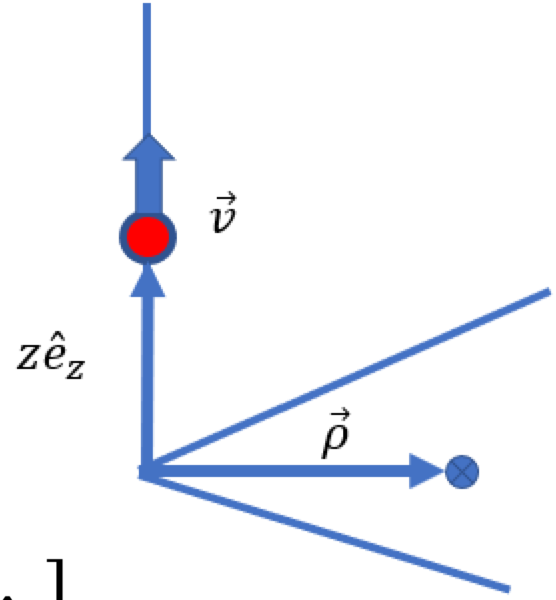
Corrente de deslocamento

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$v \ll c \rightarrow \qquad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3};\ \ \vec{r} = \rho\hat{e}_\rho;\ \ \vec{r}' = z\hat{e}_z$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho\hat{e}_\rho - vt\hat{e}_z}{(\rho^2+vt^2)^{3/2}} \rightarrow \boxed{\vec{J}_d = -\frac{qv}{4\pi R^3}\left[3\frac{z}{R^2}\vec{R} + \hat{e}_z\right]}$$

$$\vec{R} = \rho\hat{e}_\rho - z\hat{e}_z; z = vt$$



Campo magnético

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J}_d = -\frac{\mu_0 qv}{4\pi R^3}\left[3\frac{z}{R^2}(\rho\hat{e}_\rho - z\hat{e}_z) + \hat{e}_z\right]$$

Como $\vec{J}_d$ só tem componentes (ρ, z), temos

$$\left(\nabla \times \vec{B}\right)_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} = -\frac{\mu_0 qv}{4\pi R^3}\left(3\frac{z\rho}{R^2}\right);$$

$$\left(\nabla \times \vec{B}\right)_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_\rho}{\partial \theta} = \frac{\mu_0 qv}{4\pi R^3}\left(3\frac{z^2}{R^2} - 1\right)$$

Simetria em torno do eixo $z \;\to\; \partial/\partial\theta = 0$; portanto em ambas as equações somente as derivadas da componente B_θ não se anulam. Tomemos a primeira

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = \frac{\mu_0 q v}{4\pi}\frac{3\rho z}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} \to B_\theta = \frac{\mu_0 q v \rho}{4\pi} 3\int \frac{z}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} dz = -\frac{\mu_0 q v \rho}{4\pi R^3}$$

$$\vec{v} = v\hat{e}_z;\;\; \vec{R} = \rho\hat{e}_\rho - z\hat{e}_z \;\Longrightarrow\; \vec{B} = -\mu_0 \frac{q\vec{v}\times\vec{R}}{4\pi R^3} = -\mu_0\epsilon_0\vec{v}\times\left(\frac{q\vec{R}}{4\pi R^3}\right)$$

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}}$$

Integre a outra equação para B_θ e mostre que se obtém o mesmo resultado.

Momento total do campo do elétron

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{c^2\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = -\frac{1}{\mu_0 c^4}\vec{E}\times\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)$$

$$\vec{v}\times\vec{E} = v\frac{q\rho}{4\pi R^3}\hat{e}_\theta \;\rightarrow\; \vec{E}\times\left(\vec{v}\times\vec{E}\right) = v\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^2 \rho\left[\rho\hat{e}_\rho - z\hat{e}_z\right]\times\hat{e}_\theta$$

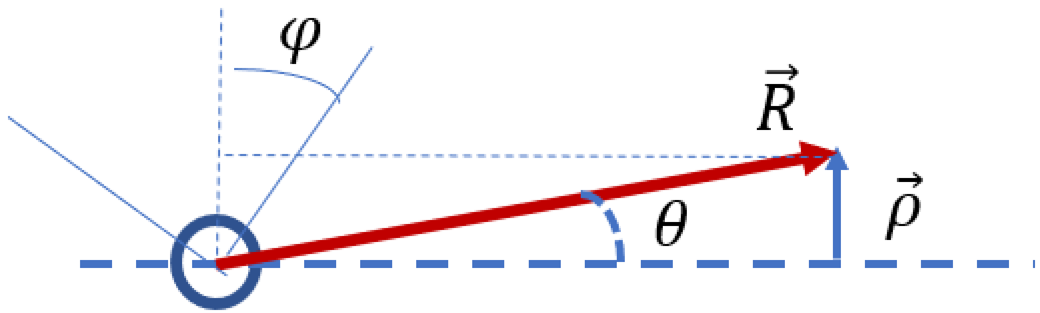
$$\vec{g} = -\frac{1}{\mu_0 c^4} v\rho\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^2\left[\rho\hat{e}_z + z\hat{e}_\rho\right]$$

Momento total:

$$\vec{P} = \int \vec{g}\,dV$$

Como a carga está distribuída em uma casca esférica de raio a $\rightarrow$ integral em coordenadas esféricas (R,θ,φ) centrada na esfera.

$$\hat{e}_\rho = \cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin\varphi\,\hat{e}_y \;\rightarrow\; \int_0^{2\pi}\hat{e}_\rho\,d\varphi = 0$$



$$\vec{P} = -\frac{1}{\mu_0 c^4} v \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 (2\pi) \int_a^{\infty} \frac{1}{R^6} R^2 dR \int_0^{\pi} \underbrace{(R\sin\theta)^2}_{\rho^2} \sin\theta d\theta \; (\hat{e}_z)$$

$$\vec{P} = -\left[\frac{v}{\mu_0 c^4} 2\pi \frac{q^2}{(4\pi)^2\epsilon_0^2} \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{a}\right)\right] \hat{e}_z = \frac{2}{3}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)\frac{\vec{v}}{c^2} = m_e\vec{v}$$

onde a *massa eletromagnética* do elétron é definida como

$$\boxed{m_e c^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right)}$$

Esta não é a energia total de repouso do elétron, porque não consideramos a energia para manter estável a configuração de carga que supomos. Mas se m_e for igualado à massa clássica do elétron ,

$$a \approx 2{,}8 \times 10^{-15} m$$

Encaminhamento de alguns problemas do Cap. 4 do Frenkel

12. Mostrar que, definindo o vetor de Poynting para campos estáticos $\left({}^{\partial}/_{\partial t} = 0\right)$, e na ausência de correntes de condução, $\oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = 0$.

Escrever a integral, utilizar o teorema de Gauss, passando para $\int \nabla \cdot \vec{S} dV$, usar a relação vetorial para $\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$ e utilizar as leis de Faraday e Ampère para obter o resultado.

13. Mostrar que, na magnetostática, o divergente do Tensor de Maxwell fornece a densidade de força magnética.

Ao invés de trabalhar por componentes, utilize a forma de díada para o tensor:

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B}\vec{B} - \frac{B^2}{2}\overleftrightarrow{I}\right] \rightarrow \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \frac{1}{\mu_0}\left[\left(\nabla \cdot \vec{B}\right)\vec{B} + \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{B} - \nabla \frac{B^2}{2}\right]$$

Utilize a relação vetorial para o gradiente do quadrado de um campo e a Lei de Ampère na magnetostática para obter o resultado $\vec{J} \times \vec{B}$.

8. Mostrar que, numa situação em que o campo magnético varia com o tempo, o campo elétrico de indução é dado por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}\,',t)}{\partial t} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dV'$$

Este problema é o mesmo do Capítulo 9 do Panofsky and Phillips, Prob. 6, que está na primeira série de exercícios. Na redação do Professor Frenkel, faltou mencionar que este é somente o campo de indução, ou seja, não há cargas ($\nabla \cdot \vec{E} = 0$).

Ao invés de utilizar analogia com a Lei de Ampère, como sugere o Professor Frenkel, vamos utilizar um roteiro mais elaborado, aplicando a segunda identidade de Green

$$\int [\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi]dV = \oint [\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi] \cdot d\vec{A}$$

Comece pela integral do lado direito e, utilizando as relações

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|};\ \nabla \times (f\vec{a}) = f\nabla \times \vec{a} - \vec{a} \times \nabla f;\ \int (\nabla \times \vec{a})dV = \oint d\vec{A} \times \vec{a}$$

mostre que

$$\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dV' = -\int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\left(\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV'$$

(Para isso, é necessário justificar porque uma integral de superfície vai a zero no infinito)

Utilizando a Lei de Faraday e que, para o campo de indução, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, mostre que a integral acima fica

$$-\int \frac{\nabla^2 \vec{E}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV'$$

Portanto, para cada componente cartesiana *j* do campo, o integrando é do tipo $\psi \nabla^2 \phi$, onde $\psi = 1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|;\;\; \phi = E_j$. Então, procure aplicar o Segunda Identidade de Green, utilizando o resultado conhecido para $\nabla^2(1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|)$ para finalmente obter que a integral inicial de facto se reduz a $\vec{E}(\vec{r},t)$.

Comente o significado deste resultado.

Capacitor em corrente alternada

Um capacitor de placas planas paralelas é formado por dois discos de raio a, separados entre si de uma distância $d \ll a$, no vácuo. O capacitor está conectado a um gerador de corrente alternada de frequência ω, que carrega suas placas com uma carga $q(t) = q_0 \sin(\omega t)$. Considerando baixas frequências, de forma que $(\omega a/c) \ll 1$, e efeitos de borda, o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas pode ser considerado uniforme. Considere um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z), com o eixo z passando pelo centro das placas.

a. Calcule a expressão do campo elétrico $\vec{E}(r, z, t)$ entre as placas do capacitor.

b. Calcule a expressão do campo magnético $\vec{B}(r, z, t)$ entre as placas do capacitor.

c. Calcule o vetor de Poynting na região entre as placas.

d. Usando a aproximação de baixas frequências,

   mostre que a conservação de energia, expressa pela equação

$$\nabla \cdot \vec{S} + \partial u/\partial t = 0$$

   é satisfeita.