# 5

# Métodos de sobreclassificação

Os métodos de sobreclassificação, cuja denominação em português ainda não tem uma visão uniforme, podem ser chamados também de métodos de superação, prevalência ou subordinação e síntese. A denominação em inglês, portanto, utilizada na literatura internacional é *outranking*. O próprio termo em inglês não traduz bem a ideia do método, cuja designação inicial vem da língua francesa: *surclassment*. Alguns pesquisadores de língua portuguesa entendem que os termos *"superação"* ou *"prevalência"* traduzem melhor o significado original e a ideia dos métodos nessa linha. Neste texto será adotada a denominação *"sobreclassificação"*, por seu uso mais disseminado e sua proximidade com o termo de uso internacional.

Os métodos de sobreclassificação consistem em uma das principais escolas de métodos de decisão multicritério. Os elementos básicos que distinguem essa abordagem são considerados e sua distinção para as anteriores. São apresentadas as famílias de métodos ELECTRE e PROMETHEE, que são os mais usados. Alguns aspectos relativos à aplicação prática destes métodos são abordados.

## 5.1 Características gerais dos métodos de sobreclassificação

Esses métodos são baseados na comparação par a par entre as alternativas, explorando uma relação de sobreclassificação que tem algumas características que se distinguem fortemente dos métodos de agregação por meio de critério único de síntese.

Em geral, os métodos de sobreclassificação não realizam uma agregação analítica para estabelecer um *score* para cada alternativa, e, assim, facilitar a completa comparação entre essas alternativas, como no caso dos métodos de agregação através de critério único de síntese.

Esses métodos assumem a possibilidade de incomparabilidade na estrutura de preferência do decisor, usando uma relação de sobreclassificação entre as alternativas, que não é transitiva. Por conseguinte (salvo exceções específicas, que representam artifícios na concepção original do método), esses métodos podem trazer resultados parciais na apresentação das recomendações.

Uma característica importante nesses métodos é que eles apresentam avaliações não compensatórias, enquanto os métodos de agregação por meio de critério único de síntese são compensatórios.

Nesses métodos, a avaliação intercritério pode ser representada pelos pesos dos critérios, que assumem a noção de grau de importância. Visto que não há uma transformação de escalas de avaliações intracritérios para uma escala de avaliação global, em que cada alternativa recebe um *score* global, nos métodos de sobreclassificação não existe o problema de uso dessa noção para os pesos, como ocorre com os métodos de agregação por meio de critério único de síntese.

Pode-se traduzir a noção de importância entre critérios como votos. Considerando G e H dois subconjuntos da família de critérios F, G será mais importante do que H, se duas ações 'a' e 'b' são encontradas, tal que:

- 'a' é melhor do que 'b' para todos os critérios de G;
- 'b' é melhor do que 'a' para todos os critérios de H;
- 'a' e 'b' são indiferentes para todos os outros critérios;
- 'a' é globalmente melhor do que 'b'.

Observa-se que, assumindo-se que "mais importante do que" pode ser representada por n constantes, $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$, associadas aos n critérios, tem-se que a comparação entre G e H é equivalente à comparação entre o somatório dos pesos dos critérios nos quais 'a' é melhor do que 'b' e o somatório dos pesos dos critérios nos quais 'b' é melhor do que 'a'.

Outro método de sobreclassificação, o TATIC, é apresentado no Capítulo 6.

## 5.2 Família de métodos ELECTRE

Esses métodos são aplicados em duas fases:

- Construção da relação de sobreclassificação, onde se estabelece uma comparação par a par entre as alternativas.
- Exploração da relação de sobreclassificação, onde se aplica um procedimento ou algoritmo para resolver o problema em função da problemática específica abordada.

A família ELECTRE (*Elimination et Choix Traduisant la Réalité*) inclui vários métodos, cada um aplicável a uma situação diferente, conforme segue:

- Método ELECTRE I – problemática de escolha, com uso de critério verdadeiro.
- Método ELECTRE IS – problemática de escolha, com uso de pseudocritério.
- Método ELECTRE II – problemática de ordenação, com uso de critério verdadeiro.
- Método ELECTRE III – problemática de ordenação, com uso de pseudocritério.
- Método ELECTRE IV – problemática de ordenação, com uso de pseudocritério, sem uso de pesos para os critérios.
- Método ELECTRE TRI – problemática de classificação, com uso de pseudocritério.

Os métodos que usam pseudocritério podem ser aplicados à situação de critério verdadeiro, mediante uma parametrização adequada.

### *5.2.1 Conceitos básicos*

Seja A um conjunto de ações e $g_i(a)$ a avaliação de qualquer uma dessas ações segundo um critério i (i =1, 2, 3, ..., n). Aplicando a relação de sobreclassificação aos elementos do conjunto A, pode-se definir que uma alternativa 'a' sobreclassifica uma alternativa 'b', ou aSb, se a alternativa 'a' é pelo menos tão boa quanto a alternativa 'b'. Essa relação de sobreclassificação, que não é necessariamente transitiva, aparece como uma possível generalização do conceito de dominância.

- C(a,b): Índice de Concordância com a afirmativa aSb.
- D(a,b): Índice de Discordância com a afirmativa aSb.

Podemos notar que os índices acima estabelecem limites para a validação ou não da hipótese aSb.

O índice de concordância é dado por:

$$C(a, b) = \sum_{i:g_i(a) \geq g_i(b)} p_i \text{, sendo } \sum_i p_i = 1$$

Esse índice corresponde à soma dos pesos de todos os critérios i para os quais a alternativa 'a' tenha vantagem sobre 'b', ou seja, $g_i$ (a) ≥ $g_i$ (b). Isto significa que aSb, se 'a' tiver a maioria dos pesos dos critérios a seu favor. Esse índice será um valor entre 0 e 1.

O valor da discordância da proposição aSb, D(a,b), também será um valor entre 0 e 1. Há formas diferentes de se determinar esse indicador. A seguir é apresentada uma das formas:

$$D(a, b) = max\left(\frac{g_i(b) - g_i(a)}{Escala_i}\right), \forall i \,|\, g_i(b) > g_i(a)$$

onde $Escala_i = max[g_i(c) - g_i(d)], \forall i, c, d$

D(a,b) é a máxima diferença entre os valores de g(b) e g(a) para todos os critérios em que g(b) > g(a), dividida pelo intervalo da escala do critério considerado (que será igual a 1, quando se usa a escala de 0 a 1). Esse índice considera a desvantagem da alternativa 'a' em relação à alternativa 'b', para os critérios em favor de b, que são minoria. Se esse valor estiver acima de certo limiar haverá discordância de que aSb. Isso significa um possível veto à concordância de que aSb, já dada por C(a,b). A motivação para essa condição vem da visão de dar voz às minorias (critérios em favor de 'b'), caso a vantagem de 'b' seja acima de certo valor admissível para qualquer desses critérios.

Outra forma de se obter o índice de discordância é:

$$D(a, b) = Max\left(\frac{p_i[g_i(b) - g_i(a)]}{p_i Escala_i}\right)$$

Dois conceitos básicos são utilizados para a construção da relação de sobreclassificação:

- Concordância: o fato de que um subconjunto significativo dos critérios considera que a alternativa 'a' é (fracamente) preferível à alternativa 'b'.
- Discordância: o fato de que não existem critérios em que a intensidade da preferência de 'b' em relação à alternativa 'a' ultrapasse um limite inaceitável.

Para avaliação da concordância, deve-se considerar a possibilidade de ocorrência de interações entre critérios. Três tipos de interação têm sido considerados: mútua forte, mútua fraca e antagônica. Para tal situação, um novo índice de concordância incorpora esses tipos de interação (FIGUEIRA et al., 2009).

A discordância exerce um papel de veto em relação à concordância. No entanto, o veto pode ser tratado também como sendo outro parâmetro importante, que pode ser definido para cada critério e fixa um valor para a diferença $g_j(b) - g_j(a)$, que é a diferença em relação ao critério j e discordante da afirmativa aSb, a partir da qual não será aceita a proposição aSb. Nem todos os métodos utilizam o veto em seus procedimentos. Entretanto, deve-se observar que o indicador de discordância tem uma característica de vetar a sobreclassificação aprovada pelo indicador de concordância.

## 5.3 Método ELECTRE I

Esse método foi estabelecido para a problemática de escolha, para a qual a otimização (escolha da melhor alternativa) é um caso particular. Nessa problemática, a ideia básica é reduzir o tamanho do conjunto de alternativas A, para um subconjunto de A, com o menor número possível de alternativas.

Na primeira fase desse método se estabelece a construção das relações de sobreclassificação, tendo como resultado uma matriz com a comparação par a par entre as alternativas.

Na segunda fase, tem-se a exploração das relações de sobreclassificação. Aplica-se um procedimento para selecionar o *kernel* ou subconjunto que representa a solução para o problema nessa problemática de escolha. O *kernel* consiste no subconjunto de alternativas de A que não é sobreclassificado por nenhuma alternativa do *kernel*.

A primeira fase, com a construção da relação de sobreclassificação, leva às considerações que nos conduzem a aceitar a relação aSb, que podem ser explicitadas através de dois índices:

para o caso em
escala ordinal).
cada critério i.
, quando $g_i$ (a)
uponha a escala
= deficiente. Se
será aceita, caso

de discordância
seguinte forma:

este caso há um

ificação, tem-se

de grafos, con-
no grafo, confor-

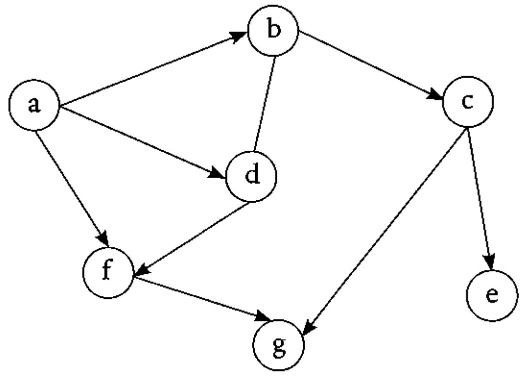
ativa por outra.

a) indica indife-
a entre as alter-

parabilidade. Por
a' e 'c'.



Figura 5.1 – Relações de sobreclassificação




Neste exemplo, a relação de sobreclassificação entre as alternativas é a seguinte:

- aSb; aSd; aSf
- bSc
- cSe; cSg
- dSf
- fSg

Numa análise do grafo pode-se observar que o *kernel* consiste no subconjunto das alternativas 'a' e 'c', pois estas não sobreclassificam uma à outra.

Pode ser utilizado o seguinte procedimento, dividido em duas etapas:

- Selecionam-se para o *kernel* todas as alternativas que não são sobreclassificadas por nenhuma outra do conjunto A; neste caso, tem-se a alternativa: 'a'.
- Do subconjunto restante (das alternativas que são sobreclassificadas), selecionam-se as alternativas que não são sobreclassificadas pelas alternativas que já estão no *kernel*, conforme a etapa anterior, nem serão sobreclassificadas também pelas que passarão a integrar o *kernel*, nesta etapa; nesse caso, tem-se a alternativa: 'c'.

Concluindo, no exemplo, o *kernel* é constituído das alternativas 'a' e 'c'. Observa-se que não se aplica nesse caso a propriedade de transitividade. Pois, embora aSb e bSc, não se aplica a relação aSc.

Esses dois índices, nessa forma, não podem ser aplicados para o caso em que as avaliações das alternativas sejam qualitativas (ou com escala ordinal). Nessa situação, utiliza-se um conjunto de discordância $D_i$ para cada critério i. Esse conjunto corresponde a pares ordenados $(x_i, y_i)$, tais que, quando $g_i$ (a) = $x_i$ e $g_i$ (b) = $y_i$, então recusa-se a relação aSb. Como exemplo suponha a escala verbal: MB = muito bom, B = bom, R = regular, F = fraco, D = deficiente. Se um dos elementos de $D_i$ para o critério i for (MB, R), aSb não será aceita, caso $g_i$ (a) = R e $g_i$ (b) = MB.

Deve-se agora definir um limiar de concordância c e um limiar de discordância d, o que permitirá estabelecer a relação de sobreclassificação da seguinte forma:

$$aSb \text{ se e somente se } \begin{cases} C(a,b) \geq c \\ D(a,b) \leq d \end{cases}$$

No caso em que ocorrer aSb e bSa, tem-se um circuito e neste caso há um empate, considerando-se como indiferença.

Na segunda fase, com a exploração da relação de sobreclassificação, tem-se o procedimento para selecionar o *kernel*.

Uma das formas de analisar esse problema é através do uso de grafos, conforme exemplificado na Figura 5.1. Três situações são indicadas no grafo, conforme segue:

- A seta representa a sobreclassificação de uma alternativa por outra. Por exemplo, aSb.
- Uma ligação entre alternativas sem uma direção (seta) indica indiferença entre as alternativas. Por exemplo, há indiferença entre as alternativas b e d.
- Nenhuma ligação entre duas alternativas indica incomparabilidade. Por exemplo, há incomparabilidade entre as alternativas 'a' e 'c'.

Um dos procedimentos utilizados para resolver problemas onde há vários circuitos é a redução dos circuitos, que consiste em considerar como sendo um dos vértices do grafo todos os vértices pertencentes a um circuito. Assim, essas alternativas são tratadas como sendo indiferentes. O grafo final resultante será um grafo reduzido.

## 5.4 Método ELECTRE II

Esse método foi estabelecido para a problemática de ordenação (*ranking*) das alternativas. Nesse método são construídas duas relações de sobreclassificação:

- Relação de sobreclassificação forte: $S^F$.
- Relação de sobreclassificação fraca: $S^f$.

São estabelecidos dois limiares de concordância $c^+$ e $c^-$ e dois limiares de discordância $d^+$ e $d^-$. Sendo $c^+ > c^-$ e $d^+ < d^-$.

A relação de sobreclassificação forte é definida da seguinte forma, destacando que há variações na literatura:

$$aS^Fb \text{ se e somente se } \left[\begin{array}{c} C(a,b) \geq c^+ \\ \sum\limits_{i:g_i(a)>g_i(b)} p_i > \sum\limits_{i:g_i(a)<g_i(b)} p_i \\ D(a,b) \leq d^+ \end{array}\right.$$

A relação de sobreclassificação fraca é definida da seguinte forma:

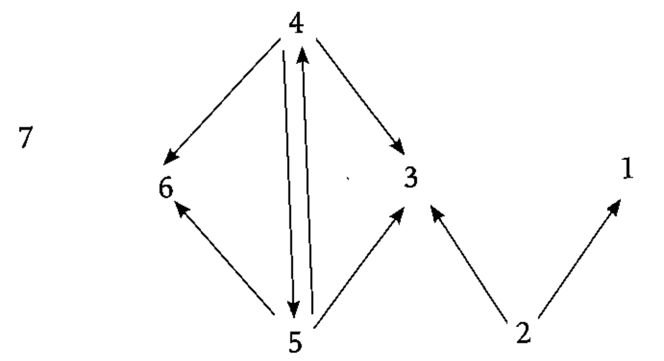
$$aS^fb \text{ se e somente se } \left[\begin{array}{c} C(a,b) \geq c^- \\ \sum\limits_{i:g_i(a)>g_i(b)} p_i > \sum\limits_{i:g_i(a)<g_i(b)} p_i \\ D(a,b) \leq d^- \end{array}\right.$$

A segunda condição à relação de sobreclassificação, relativa à soma dos pesos, equivale a ter $C(a,b) > C(b,a)$. Essa condição reduz a possibilidade de duas alternativas sobreclassificarem uma a outra simultaneamente, como ocorre no ELECTRE I.

Nesse método podem ocorrer circuitos. Se não ocorrer circuito, haverá apenas um *kernel*, como no exemplo citado. Caso contrário, poderá haver mais de um *kernel*.

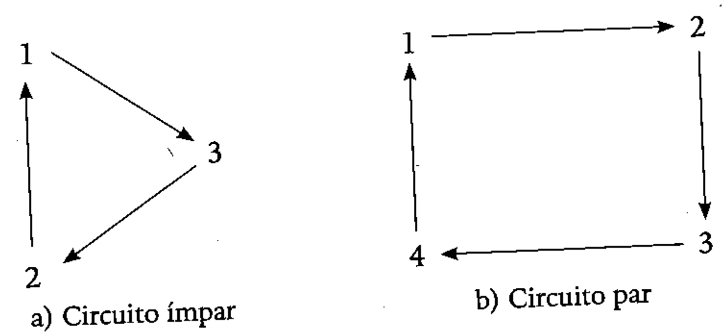
No exemplo da Figura 5.2 (observa-se que o grafo utiliza outra representação, sem usar um círculo para representar cada alternativa), há circuito entre as alternativas 4 e 5, provocando dois conjuntos *kernel*, que são {2,4,7} e {2,5,7}. As alternativas 4 e 5 são consideradas empatadas (*tied*), ou seja indiferentes, pois, aSb e bSa. A alternativa 7 não é comparável a nenhuma outra alternativa.

Figura 5.2 – Exemplo com circuitos




A Figura 5.3 mostra dois exemplos específicos de circuitos. No circuito ímpar, com alternativas 1, 2 e 3, têm-se 2S1, 1S3, 3S2. Neste caso, não há *kernel*. No circuito par, com 4 alternativas, têm-se 1S2, 2S3, 3S4 e 4S1. Neste caso, há dois conjuntos *kernel*: (1,3) e (2,4).

Figura 5.3 – Circuitos ímpar e par



Um procedimento utilizado para combinação das duas pré-ordens forma uma ordem parcial (permitindo incomparabilidades) e consiste na interseção das duas pré-ordens.

Alguns procedimentos combinam as pré-ordens de modo a obter uma ordem completa. No entanto, informação relevante contida na ordem parcial pode ser perdida.

## 5.5 Método ELECTRE III

Enquanto os métodos anteriores lidam com situações envolvendo critério verdadeiro, esse método considera pseudocritério, usando limiares de indiferença e preferência.

Um aspecto relevante a ser destacado é que esse método usa uma relação de sobreclassificação valorada. Isto é, são atribuídos valores às alternativas.

Na primeira fase, são utilizados os índices de concordância e discordância para a construção da relação de sobreclassificação que é baseada no Grau de Sobreclassificação S(a,b). Este índice S(a,b) indica quanto é a credibilidade de sobreclassificação de 'a' sobre 'b', com valores entre 0 e 1; consiste numa função que é crescente com $g_i$ (a) e decrescente com $g_i$ (b), para qualquer critério i.

O índice de concordância é dado por:

$$C(a, b) = \sum_{i=1}^{n} p_i c_i(a, b)$$

Onde:

$$\sum_i p_i = 1$$

$$c_i(a, b) = \begin{cases} 1 \text{ se } g_i(a) + q_i(g_i(a)) \geq g_i(b) \\ 0 \text{ se } g_i(a) + p_i(g_i(a)) \leq g_i(b) \\ \quad \text{linear entre os dois} \end{cases}$$

$q_i$ e $p_i$ são os limiares de indiferença e preferência, respectivamente.

A definição do índice $c_i$(a,b) pode ser mais bem entendida na Figura 5.4. O valor de $c_i$(a,b) dependerá dos valores dos limiares. $c_i$(a,b) = 1, quando o valor de $g_i$(b) está abaixo do valor de $g_i$(a) mais o valor do limiar de indiferença. $c_i$(a,b) = 0, quando o valor de $g_i$(b) está acima do valor de $g_i$(a) mais o valor do limiar de preferência. Em situações intermediárias a essas duas, $c_i$(a,b) terá valores entre 0 e 1.

Na segunda etapa de exploração da relação de sobreclassificação, aplica-se um procedimento para efetuar dois *rankings* das alternativas, usando as duas relações de sobreclassificação.

O primeiro *ranking* começa com as melhores alternativas, seguindo uma ordem decrescente, e o segundo *ranking* começa com as piores, seguindo uma ordem crescente. Ambos os *rankings* aplicam $S^F$ e $S^f$.

Para a elaboração dos dois *rankings*, há vários procedimentos. A seguir é apresentado um desses procedimentos:

1. Determinar o subconjunto de alternativas $A^F$ de A, que não é fortemente sobreclassificado ($S^F$) por nenhuma alternativa de A.
2. Determinar o subconjunto de alternativas $A^f$ de $A^F$, que não é fracamente sobreclassificado ($S^f$) por outra alternativa dentro de $A^F$. Esse subconjunto forma a primeira classe do *ranking* decrescente.
3. Retirar as alternativas em $A^f$ do conjunto A. Depois repetir o procedimento a partir de 1 até que todas as alternativas tenham sido ordenadas. Essa ordenação corresponde à ordem decrescente.
4. Reiniciar o processo, com o conjunto A completo.
5. Determinar o subconjunto de alternativas $R^F$ de A, que não sobreclassifica fortemente ($S^F$) nenhuma outra alternativa de A.
6. Determinar o subconjunto de alternativas $R^f$ de $R^F$, que não sobreclassifica fracamente ($S^f$) nenhuma outra alternativa dentro de $R^F$. Esse subconjunto forma a primeira classe do *ranking* crescente.
7. Retirar as alternativas em $R^f$ do conjunto A. Depois repetir o procedimento a partir de 5 até que todas as alternativas tenham sido ordenadas. Essa ordenação corresponde à ordem crescente.

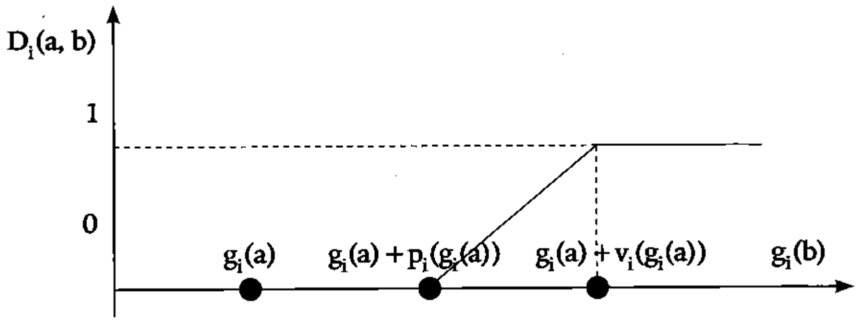
Com esse procedimento têm-se duas pré-ordens (não são ordens, pois pode haver indiferenças entre algumas ações) completas (sem incomparabilidade). Essas duas pré-ordens nem sempre são as mesmas. Alternativas problemáticas (com grande divergência, geralmente devido a incomparabilidades) podem surgir, requerendo uma análise mais detalhada.

Há vários procedimentos propostos para combinar as duas pré-ordens. Se houver uma proximidade entre elas, pode-se propor ao decisor uma pré-ordem que é uma combinação destas. Se houver muita divergência entre as pré-ordens, um estudo mais amplo será necessário.

valor do limiar de preferência. Em situações intermediárias a essas duas, $D_i(a,b)$ terá valores entre 0 e 1.

Observa-se que foram considerados limiares variáveis em função do valor de $g_i(a)$. No entanto, pode-se também trabalhar com limiares constantes. Nesse caso, ter-se-iam simplesmente: $q_i = q_i(g_i(a))$ e $p_i = p_i(g_i(a))$.

Figura 5.5 – Ilustração para o índice de discordância




Com base nos índice de concordância e de discordância, tem-se a definição do grau de sobreclassificação S(a,b):

$$S(a, b) = \begin{cases} C(a, b) \text{ se } D_i(a, b) \leq C(a, b), \forall_i \\ C(a, b) \prod\limits_{i:D_i(a,b) > C(a,b)} \dfrac{1 - D_i(a,b)}{1 - C(a,b)} \end{cases}$$

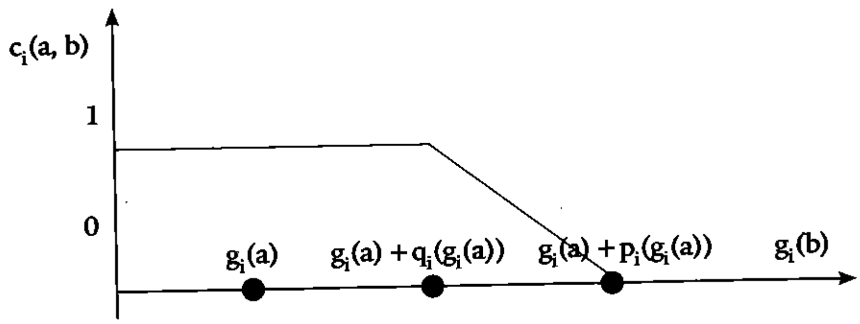
Tem-se então que o grau de sobreclassificação é igual ao índice de concordância, quando não há discordância para nenhum critério. Caso contrário, o índice de concordância é reduzido em função dos graus das discordâncias.

Na segunda etapa, de exploração da relação de sobreclassificação, são obtidas duas pré-ordens completas.

Para obtenção da primeira pré-ordem, aplica-se um procedimento chamado destilação descendente, que consiste no seguinte algoritmo:

1. A partir do conjunto A, seleciona-se a melhor alternativa $a_j$, que é chamada de primeira destilação D1.

Figura 5.4 – Ilustração para o índice de concordância




Nesse método, pode-se trabalhar com critério verdadeiro, utilizando-se para o índice de concordância a forma adotada nos métodos ELECTRE I e II.

Pode-se também trabalhar com uma situação quase critério para o critério i. Isto é, quando os limiares têm o mesmo valor: $q_i(g_i(a)) = p_i(g_i(a))$. Nesse caso, o índice de concordância se torna:

$$C(a, b) = \sum_{i: g_i(a) + q_i(g_i(a)) \geq g_i(b)} p_i, \text{ sendo } \sum_i p_i = 1$$

Nesse método, o uso do índice de discordância inclui de forma explícita outro índice que é o veto $v_i(g_i(a))$, para o qual se rejeita qualquer credibilidade de que aSb se:

$$g_i(b) \geq g_i(a) + v_i(g_i(a)).$$

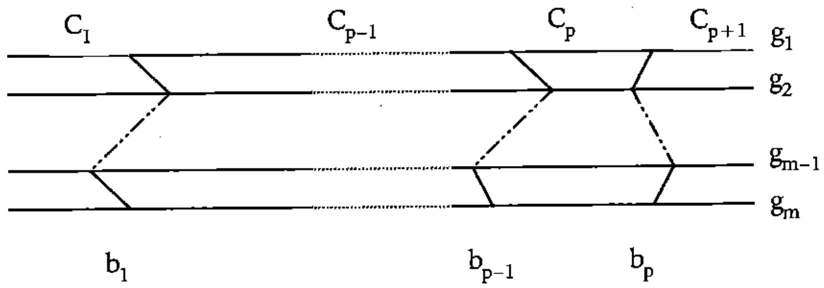
Assim, o índice de discordância é definido por:

$$D_i(a, b) = \begin{cases} 0 \text{ se } g_i(b) \leq g_i(a) + p_i(g_i(a)) \\ 1 \text{ se } g_i(b) \geq g_i(a) + v_i(g_i(a)) \\ \quad \text{linear entre os dois} \end{cases}$$

A definição do índice $D_i$(a,b) pode ser mais bem entendida na Figura 5.5. O valor de $D_i$(a,b) dependerá dos valores dos limiares de preferência e do veto. $D_i$(a,b) = 1, quando o valor de $g_i$(b) está acima do valor de $g_i$(a) mais o valor do veto. $D_i$(a,b) = 0, quando o valor de $g_i$(b) está abaixo do valor de $g_i$(a) mais o

As preferências por cada critério são definidas mediante um pseudocritério, no qual os limiares de preferência e indiferença $p_j[g(b_h)]$ e $q_j[g(b_h)]$ constituem as informações intracritério. Assim, $q_j[g(b_h)]$ especifica a maior diferença $g_j(a) - g_j(b_h)$, que preserva a indiferença entre 'a' e $b_h$ no critério $g_j$, e $p_j[g(b_h)]$ representa a menor diferença $g_j(a) - g_j(b_h)$, compatível com uma preferência de 'a' sobre $b_h$ no critério $g_j$. A Figura 5.6 ilustra os perfis e seu posicionamento para os diversos critérios.

Figura 5.6 – Perfis




**Fonte**: Adaptada de Mousseau e Slowinski (1998).

A estrutura de preferência com pseudocritérios (modelo com duplo limiar $p_j[g(b_h)]$ e $q_j[g(b_h)]$) evita uma passagem repentina entre a indiferença e a preferência estrita, existindo uma zona de hesitação, representada pela preferência fraca, conforme Figura 5.7. Para simplificação, nessa figura o índice h foi retirado (sse significa se e somente se).

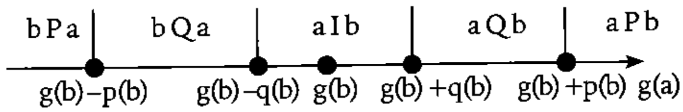
Figura 5.7 – Estrutura de preferência com pseudocritérios.

$\forall\, a, b \in A$

a P b sse $g(a) > g(b) + p[g(b)]$

a Q b sse $g(b) + p[g(b)] \geq g(a) > g(b)$

a I b sse $\begin{cases} g(b) + q[g(b)] \geq g(a) \\ g(a) + q[g(a)] \geq g(b) \end{cases}$



2. A alternativa em D1 é retirada do conjunto A, que passa a ser chamado de A'.
3. Repetem-se os procedimentos 1 e 2 sobre o conjunto A' remanescente, obtendo-se a segunda destilação D2 e assim sucessivamente até se chegar à alternativa com pior desempenho.

Observa-se que se $D_1$ contém mais de uma alternativa, então os passos 1 e 2 são aplicados ao conjunto $D_1$, e assim sucessivamente, até que cada $D_i$ tenha apenas uma alternativa.

A segunda pré-ordem é obtida através de procedimento de destilação ascendente, na qual as alternativas com menor desempenho são selecionadas.

Para a avaliação das alternativas são utilizados alguns índices para a determinação do desempenho dessas alternativas.

Utiliza-se o valor $\lambda = \max S(a,b)$ como referência para se considerar a sobreclassificação. Isso é aplicado utilizando os valores próximos de $\lambda$. Para tal, utilizam-se os valores de $S(a,b)$ maiores do que $\lambda - s(\lambda)$, onde $s(\lambda)$ é um limiar determinado de forma a permitir a seleção de valores próximos de $\lambda$. Na literatura há a recomendação para usar $s(\lambda) = 0{,}3 - 0{,}15\,\lambda$. Diz-se então que "a é $\lambda$ preferível a b", se $S(a,b)$ é aceita.

A partir do limite para o qual se aceita a relação $S(a,b)$, tem-se a determinação de um índice de qualificação $Q(a)$. $Q(a)$ é igual ao número de alternativas em relação às quais 'a' é preferível menos o número de alternativas que são preferíveis à alternativa 'a'.

A informação obtida dessas duas pré-ordens é similar à obtida do método ELECTRE II.

## 5.6 Método ELECTRE TRI

O ELECTRE TRI é um método para a problemática de classificação. Em outras palavras, o método faz a alocação de alternativas em categorias predefinidas. A alocação de uma alternativa 'a' resulta da comparação desta alternativa com alternativas de referência, denominadas de perfis, os quais são definidos como limites para as categorias (MOUSSEAU; SLOWINSKI, 1998; YU, 1992; MIRANDA; ALMEIDA, 2003).

São considerados as avaliações das alternativas para cada critério $\{g_1, ..., g_i, ..., g_m\}$ e um conjunto de índices de perfis $\{b_1, ..., b_h, ..., b_p\}$. Definem-se $(p + 1)$ categorias, em que $b_h$ representa o limite superior da categoria $C_h$ e o limite inferior da categoria $C_{h+1}$, $h = 1, 2, ..., p$.

A afirmação $aSb_h$ é considerada válida se $\sigma(a,b_h) \geq \lambda$. $\lambda$ inicia um nível de corte tal que $\lambda \in [0.5,1]$ (MOUSSEAU et al., 2001).

Os valores de $\sigma(a,b_h)$, $\sigma(b_h,a)$ e $\lambda$ determinam as situações de preferências entre 'a' e $b_h$:

- $\sigma(a,b_h) \geq \lambda$ e $\sigma(b_h,a) \geq \lambda$ ® $aSb_h$ e $b_hSa$ ® 'a' é indiferente a '$b_h$'.
- $\sigma(a,b_h) \geq \lambda$ e $\sigma(b_h,a) < \lambda$ ® $aSb_h$ e não $b_hSa$ ® 'a' é preferível a '$b_h$'.
- $\sigma(a,b_h) < \lambda$ e $\sigma(b_h,a) \geq \lambda$ ® não $aSb_h$ e $b_hSa$ ® '$b_h$' é preferível a 'a'.
- $\sigma(a,b_h) < \lambda$ e $\sigma(b_h,a) < \lambda$ ® não $aSb_h$ e não $b_hSa$ ® 'a' é incomparável a '$b_h$'.

Dois procedimentos de atribuição das classes podem ser utilizados: procedimento pessimista e procedimento otimista (MOUSSEAU et al., 2001).

## 5.7 Família de métodos PROMETHEE

Os métodos da família PROMETHEE (*Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation*) também baseiam-se em duas fases: construção de uma relação de sobreclassificação, agregando informações entre as alternativas e os critérios, e exploração dessa relação para apoio a decisão (BRANS; MARESCHAL, 2002).

Estes métodos produzem uma relação de sobreclassificação valorada, com base em conceitos que podem ser interpretados, de forma física ou econômica, pelo decisor.

### *5.7.1 Estrutura de avaliação dos métodos PROMETHEE*

O decisor deve estabelecer para cada critério um peso $p_i$ que reflete a importância do critério. A partir desses pesos é obtido $\pi(a,b)$, o grau de sobreclassificação de a sobre b, para cada par de alternativas (a,b), que é obtido conforme segue:

$$\pi(a, b) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(a, b),$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Então, as relações de sobreclassificação S são construídas a partir de comparação das alternativas com os perfis; isto é, $aSb_h$ (ou $b_hSa$). Duas condições devem ser verificadas para validar a afirmação $aSb_h$:

- Concordância: para uma sobreclassificação $aSb_h$ ser aceita, a maioria dos critérios deve estar a favor da afirmação $aSb_h$.
- Não discordância: quando a condição de concordância for atendida, nenhum dos critérios deve opor-se fortemente à afirmação $aSb_h$.

No método ELECTRE TRI, para a construção de S é utilizado um conjunto de limiares veto $(v_1(b_h), v_2(b_h), ..., v_m(b_h))$, usado no teste de discordância. $v_j(b_h)$ representa a menor diferença $g_j(b_h) - g_j(a)$, incompatível com a afirmação $aSb_h$.

Os índices de concordância parcial $c_j(a,b)$, concordância $c(a,b)$ e discordância parcial $d_j(a,b)$ são obtidos, conforme segue:

$$c_j(a,b) = \begin{cases} 0, \text{ se: } g_j(b_h) - g_j(a) \geq p_j(b_h) \\ 1, \text{ se: } g_j(b_h) - g_j(a) \leq q_j(b_h) \\ \dfrac{p_j(b_h) + g_j(a) - g_j(b_h)}{p_j(b_h) - q_j(b_h)}, \textit{ de outra forma} \end{cases}$$

$$c(a,b) = \frac{\sum_{j \in F} k_j c_j(a,b_h)}{\sum_{j \in F} k_j}$$

$$d_j(a,b) = \begin{cases} 0, \text{ se: } g_j(b_h) - g_j(a) \leq p_j(b_h) \\ 1, \text{ se: } g_j(b_h) - g_j(a) > v_j(b_h) \\ \dfrac{g_j(b_h) - g_j(a) - p_j(b_h)}{v_j(b_h) - p_j(b_h)}, \textit{ de outra forma} \end{cases}$$

No processo é utilizado o grau de credibilidade $\sigma(a,b_h) \in [0,1]$, $(\sigma(b_h,a)$, resp.) sobre a afirmação de que $aSb_h$, $\forall a \in A$, $\forall b_h \in B$, a partir da equação seguinte:

$$\sigma(a,b_h) = c(a,b_h) \cdot \prod_{j \in \bar{F}} \frac{1 - d_j(a,b_h)}{1 - c(a,b_h)}$$

onde $= \bar{F}\{j \in F: d_j(a,b_h) > c(a,b_h)\}$

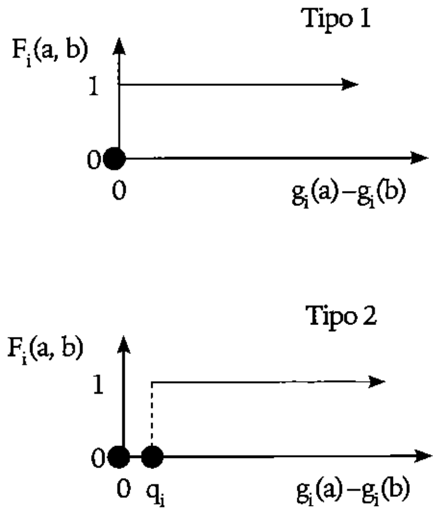
| | | |
|---|---|---|
| 4. *Pseudo critério;* definem-se os parâmetros *q* e *p*. | $g_i(a) - g_i(b) > p$<br>$q < g_i(a) - g_i(b) \leq p$<br>$g_i(a) - g_i(b) \leq q$ | $F(a,b) = 1$<br>$F(a,b) = 1/2$<br>$F(a,b) = 0$ |
| 5. *Área de indiferença;* definem-se os parâmetros *q* e *p*. | $g_i(a) - g_i(b) > p$<br>$q < g_i(a) - g_i(b) \leq p$<br>$g_i(a) - g_i(b) \leq q$ | $F(a,b) = 1$<br>$F(a,b) = (g_i(a) - g_i(b) - q)/(p - q)$<br>$F(a,b) = 0$ |
| 6. *Critério gaussiano;* O desvio-padrão deve ser fixado. | $g_i(a) - g_i(b) > 0$<br>$g_i(a) - g_i(b) \leq 0$ | A preferência aumenta segundo uma distribuição normal.<br>$F(a,b) = 0$ |

**Fonte:** Adaptada de Brans e Mareschal (2002).

Cada uma das formas para $F_i(a,b)$ corresponde a uma atitude do decisor na comparação entre os valores de a e de b, para o critério i.

As Figuras 5.8 e 5.9 ilustram a forma da função para os 6 tipos de $F_i(a,b)$.

Figura 5.8 – Funções para os critérios 1, 2 e 3 no PROMETHEE



$F_i(a,b)$ é função da diferença $[g_i(a) - g_i(b)]$ entre o desempenho das alternativas para cada critério i.

Na situação mais básica, $F_i(a,b) = 1$, quando $g_i(a) > g_i(b)$; caso contrário, $F_i(a,b) = 0$. Ou seja, o grau de sobreclassificação $\pi(a,b)$ terá na sua composição o peso $p_i$ de cada critério i, para o qual a alternativa 'a' tenha melhor desempenho do que 'b'.

No entanto, em casos específicos, quando há situações que envolvem limiares de indiferença ou de preferência ou ambos, a função $F_i(a,b)$ pode ser estabelecida de outras formas para contemplar essas situações.

Dessa forma, $F_i(a,b)$ pode ser estabelecida de acordo com o modo como a preferência do decisor aumenta com a diferença entre o desempenho das alternativas para cada critério $[g_i(a) - g_i(b)]$, e assume valores entre 0 e 1. O valor de $F_i(a,b)$ aumenta se a diferença de desempenho (ou a vantagem de um alternativa em relação a outra) aumenta, e é igual a zero se o desempenho de uma alternativa é igual ou inferior ao da outra.

No PROMETHEE há seis formas básicas para a função $F_i(a,b)$. O decisor pode representar suas preferências usando a forma mais adequada para cada critério. Esses são critérios gerais, usados para identificar a intensidade da preferência, conforme mostrado na Tabela 5.1. Nessa tabela:

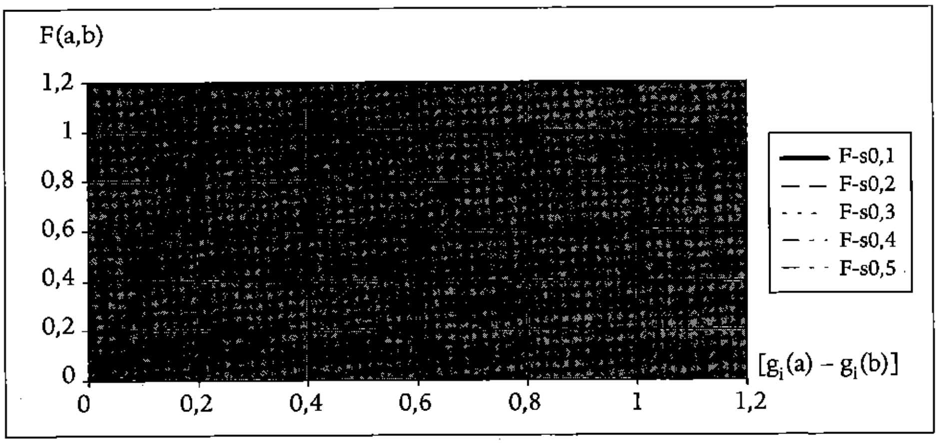
- q representa um limiar de indiferença, o maior valor para diferença $[g_i(a) - g_i(b)]$, abaixo do qual existe uma indiferença;
- p representa o limiar de preferência, o menor valor para $[g_i(a) - g_i(b)]$ acima do qual existe uma preferência estrita.

Tabela 5.1 – Critérios gerais para o PROMETHEE

| | | |
|---|---|---|
| 1. *Critério usual;* não há parâmetro a ser definido. | $g_i(a) - g_i(b) > 0$<br>$g_i(a) - g_i(b) \leq 0$ | $F(a,b) = 1$<br>$F(a,b) = 0$ |
| 2. *Quase critério;* define-se o parâmetro *q*. | $g_i(a) - g_i(b) > q$<br>$g_i(a) - g_i(b) \leq q$ | $F(a,b) = 1$<br>$F(a,b) = 0$ |
| 3. *Limiar de preferência;* define-se o parâmetro *p*. | $g_i(a) - g_i(b) > p$<br>$g_i(a) - g_i(b) \leq p$<br>$g_i(a) - g_i(b) \leq 0$ | $F(a,b) = 1$<br>$F(a,b) = \frac{g_j(a) - g_j(b)}{p}$<br>$F(a,b) = 0$ |

Onde $s_i$ é um parâmetro que controla o achatamento da função de preferência gaussiana e corresponde a um grau de preferência intermediário entre o limiar de indiferença $q_i$ e de preferência $p_i$. A Figura 5.10 mostra algumas curvas de $F_i(a,b)$ para valores de $s_i$ variando de 0,1 a 0,5. Para $s_i = [g_i(a) - g_i(b)]$, tem-se $F_i(a,b) = 0{,}39$.

Figura 5.10 – Curvas de $F_i(a,b)$ para diversos valores de $s_i$

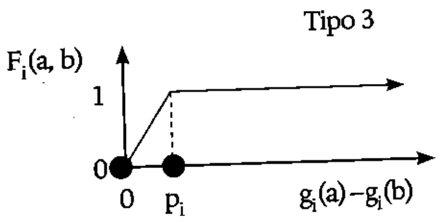



$F_i(a,b)$ poderia ser vista como uma função de intensidade de preferência, embora não possa receber essa denominação no senso estrito do termo. Para tal, a seguinte relação deveria ser verdadeira (VINCKE, 1992):

$$F_i(a,b) + F_i(b,c) = F_i(a,c)$$

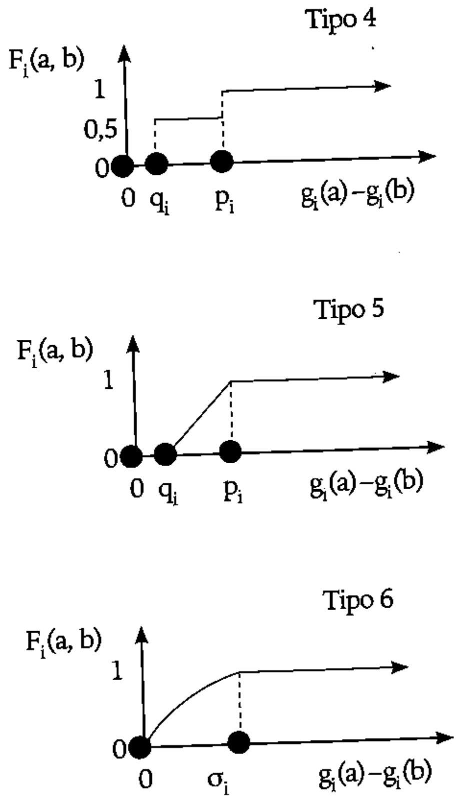
Apenas no caso acima a expressão "*intensidade de preferência*" faz sentido, o que não representa o significado preferencial da função $F_i(a,b)$. No entanto, essa expressão é utilizada de forma corrente, devendo se observar essa ressalva, visto tratar-se de um método não compensatório.

O grau de sobreclassificação do PROMETHEE tem certa similaridade com o mesmo indicador do ELECTRE III, particularmente quando a função $F_i(a,b)$ é do tipo 5, embora os parâmetros p e q sejam constantes no PROMETHEE.




**Fonte**: Adaptada de Brans e Mareschal (2002).

Figura 5.9 – Funções para os critérios 4, 5 e 6 no PROMETHEE



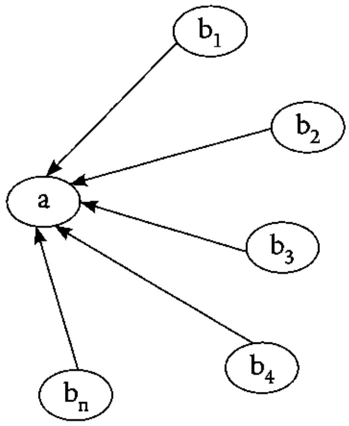

**Fonte**: Adaptado de Brans e Mareschal (2002).

O critério gaussiano pode ser calculado conforme segue:

$$F_i(a, b) = 1 - e - \left[ \frac{[g_i(a) - g_i(a)]^2}{2s_i^2} \right]$$

O fluxo de sobreclassificação de entrada da alternativa 'a' $\Phi^-(a)$ representa a intensidade de preferência de todas as alternativas 'b' (no conjunto A) sobre a alternativa 'a'. Quanto menor $\Phi^-(a)$, melhor a alternativa, conforme Figura 5.12.

Figura 5.12 – Fluxo entrante




Há outra forma de se obterem os fluxos $\Phi^+(a)$, e $\Phi^-(a)$, que foi proposta por Brans e Mareschal (2002), conforme segue:

$$\Phi + (a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(a, b)$$

$$\Phi - (a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(b, a)$$

Nesse caso, a soma dos valores associados aos arcos de entrada ou saída do grafo de sobreclassificação é dividida pelo número (n – 1) de alternativas comparadas com a. Nesse caso, o indicador fica normalizado e independente do número de alternativas no conjunto A, mantendo esse índice na escala (0,1).

Outro indicador considerado é fluxo de sobreclassificação líquido $\Phi(a)$:

$$\Phi(a) = \Phi^+(a) - \Phi^-(a)$$

Se os fluxos são normalizados, tem-se o fluxo de sobreclassificação líquido com valores entre –1 e 1.

### 5.7.2 *Fluxos de sobreclassificação*

Em seguida, vem a fase de exploração da relação de sobreclassificação para apoio a decisão. Nessa fase, dois indicadores são utilizados, conforme definido abaixo:

- Fluxo de Sobreclassificação de saída $\Phi^+(a)$ da alternativa 'a':

$$\Phi^+(a) = \sum_{b \in A} \pi(a, b)$$

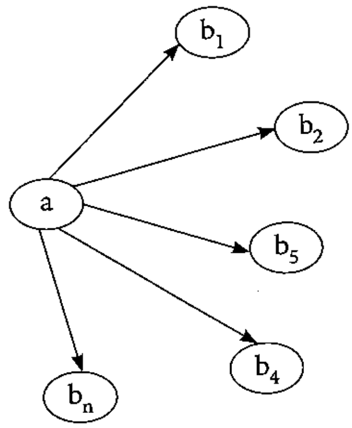
- Fluxo de Sobreclassificação de entrada $\Phi^-(a)$ da alternativa 'a':

$$\Phi^-(a) = \sum_{b \in A} \pi(b, a)$$

O fluxo de sobreclassificação de saída da alternativa 'a', $\Phi^+(a)$, representa a "intensidade de preferência" de 'a', sobre todas as alternativas 'b' no conjunto A. Quanto maior $\Phi^+(a)$, melhor a alternativa.

A terminologia adotada para os fluxos de sobreclassificação de entrada e saída está relacionada à representação gráfica da estrutura de preferência, onde se tem a medida do fluxo de sobreclassificação que entra e que sai de cada alternativa. Na Figura 5.11 é mostrado como esse indicador representa os arcos de saída da alternativa 'a', visto que a componente $\pi(a,b)$ considera as somas dos pesos (na situação mais básica) para $F_i(a,b) = 1$, quando $g_i(a) > g_i(b)$.

Figura 5.11 – Fluxo que sai da alternativa



## 5.9 Método PROMETHEE II

O método PROMETHEE II é baseado na utilização do fluxo líquido $\Phi(a)$, que é obtido da seguinte forma:

$$\Phi(a) = \Phi^+(a) - \Phi^-(a)$$

Com base no indicador $\Phi(a)$, as alternativas são organizadas em ordem decrescente, estabelecendo uma pré-ordem completa entre as alternativas, a partir das seguintes relações:

- Preferência: aPb se $\Phi(a) > \Phi(b)$.
- Indiferença: aIb se $\Phi(a) = \Phi(b)$.

Deve-se observar que a ocorrência da condição para a relação de indiferença é muito pouco provável, o que leva geralmente à consideração de que o PROMETHEE II estabelece uma ordem completa.

Observa-se que no PROMETHEE I podem ocorrer incomparabilidades, enquanto no PROMETHEE II tem-se uma ordem completa. Na realidade, o PROMETHEE II introduz uma forma de agregação com certa distorção, dentro da concepção do método de sobreclassificação, e acarreta uma perda de informação em relação ao PROMETHEE I. A questão é que esse método pode captar situações de incomparabilidade que deveriam ser examinadas com mais detalhes e não encobertas por meio de tal artifício. De qualquer forma, o PROMETHEE II tende a ser mais usado por dar uma ideia aparentemente mais confortável, apresentando uma ordem completa.

Embora haja alguma semelhança entre os métodos da família PROMETHEE e os da família ELECTRE, uma diferença significativa entre eles é que os primeiros não utilizam o conceito de discordância.

## 5.10 Outros métodos da família PROMETHEE

Além dos dois primeiros métodos, a família PROMETHEE inclui os seguintes métodos (BRANS; MARESCHAL, 2002):

- PROMETHEE III e IV: foram desenvolvidos para o tratamento de problemas de decisão mais sofisticados, em particular com um componente estocástico. PROMETHEE IV envolve o caso de um conjunto contínuo

Essa forma normalizada seria especialmente importante no uso do PROMETHEE V (antes da aplicação do procedimento de otimização, pois entendia-se que deveria ser feita uma conversão na escala para que os valores ficassem entre 0 e 2, adicionando-se 1). Isso evita que alguma alternativa fique com valor negativo ou nulo, na função objetivo. No entanto, problemas de escala foram encontrados para o PROMETHEE V, sendo discutidos novos procedimentos nesse caso. Para maiores detalhes sobre essa questão, sugere-se ver Almeida e Vetschera (2012) e Vetschera e Almeida (2012).

## 5.8 Método PROMETHEE I

Neste método, duas pré-ordens são construídas com os dois indicadores apresentados anteriormente:

- Pré-ordem decrescente de $\Phi^+(a)$.
- Pré-ordem crescente de $\Phi^-(a)$.

Essas duas pré-ordens são estabelecidas com base em duas relações: sobreclassificação e indiferença. O método PROMETHEE I consiste na interseção entre essas duas pré-ordens e produz uma pré-ordem parcial, a partir de três relações: preferência (P), indiferença (I) e incomparabilidade (R). Essas relações são obtidas conforme segue (BRANS; MARESCHAL, 2002):

- Preferência: aPb se:

  $\Phi^+(a) > \Phi^+(b)$ e $\Phi^-(a) \leq \Phi^-(b)$; ou

  $\Phi^+(a) = \Phi^+(b)$ e $\Phi^-(a) < \Phi^-(b)$.

- Indiferença: aIb se:

  $\Phi^+(a) = \Phi^+(b)$ e $\Phi^-(a) = \Phi^-(b)$.

- Incomparabilidade: aRb se:

  $\Phi^+(a) > \Phi^+(b)$ e $\Phi^-(b) < \Phi^-(a)$; ou

  $\Phi^+(b) > \Phi^+(a)$ e $\Phi^-(a) < \Phi^-(b)$.

estas se apresentam de forma transitiva. As relações de sobreclassificação são naturalmente não transitivas, fator defendido como uma das forças desses métodos, visto que isso os mantém próximos da natureza original dos problemas multicritério (MARESCHAL et al., 2008).

Deve-se também observar que reversão de ordem não ocorre entre duas alternativas 'a' e 'b', se aDb. De fato, a reversão de ordem, no método PROMETHEE, ocorre apenas para alternativas que têm os valores de fluxos líquidos muito próximos. Mareschal et al. (2008) mostram que não há reversão de ordem quando se retiram k alternativas do conjunto A (para os fluxos normalizados) se:

$$\phi(a) - \phi(b) > \frac{2k}{n-1}$$

### 5.11.2 *O uso dos métodos PROMETHEE*

O método PROMETHEE II é frequentemente citado na literatura como um método que produz um processo de agregação aditivo (BOUYSSOU et al., 2006). Deve-se tomar cuidado para não interpretar isso com associação ao modelo aditivo (compensatório), já discutido. Observe o desenvolvimento a seguir:

$$\Phi(a) = \Phi+(a) - \Phi-(a)$$

A partir de $\Phi(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b\in A}\pi(a, b) - \frac{1}{n-1}\sum_{b\in A}\pi(b, a)$, tem-se que:

$$\phi(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b\in A}\pi(a, b) - \pi(b, a)$$

Com base em $\pi(a, b) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(a, b)$, tem-se:

$$\phi(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{b\in A}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i F_i(a, b) - \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(b, a)\right]$$

Desenvolvendo, obtém-se:

$$\phi(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} p_i\left[\sum_{b\in A} F_i(a, b) - \sum_{b\in A} F_i(b, a)\right]$$

de ações *A* que surge quando as ações são, por exemplo, percentagens, dimensões de um produto, investimentos.

- PROMETHEE V: nesse método, após se obterem as avaliações das alternativas com base no PROMETHEE II, são consideradas restrições, identificadas no problema, e então se aplica a seleção de um conjunto de alternativas, tratando da problemática de portfólio, com otimização inteira 0-1.
- PROMETHEE VI: nesse método, quando o decisor não está apto ou não quer definir precisamente os pesos para os critérios, pode especificar intervalos de possíveis valores em lugar de um valor fixo para cada peso.

## 5.11 Questões práticas para o uso dos métodos PROMETHEE

Algumas questões de ordem prática são discutidas a seguir em relação aos métodos da família PROMETHEE.

Deve-se destacar que o problema de escala observado em relação ao PROMETHEE V e detalhado em Almeida e Vetschera (2012) e Vetschera e Almeida (2012) não interfere nem afeta de forma alguma os outros métodos dessa família. É uma questão que afeta apenas o uso desse tipo de avaliação para problemas de portfólio, conforme destacado em Almeida e Vetschera (2012).

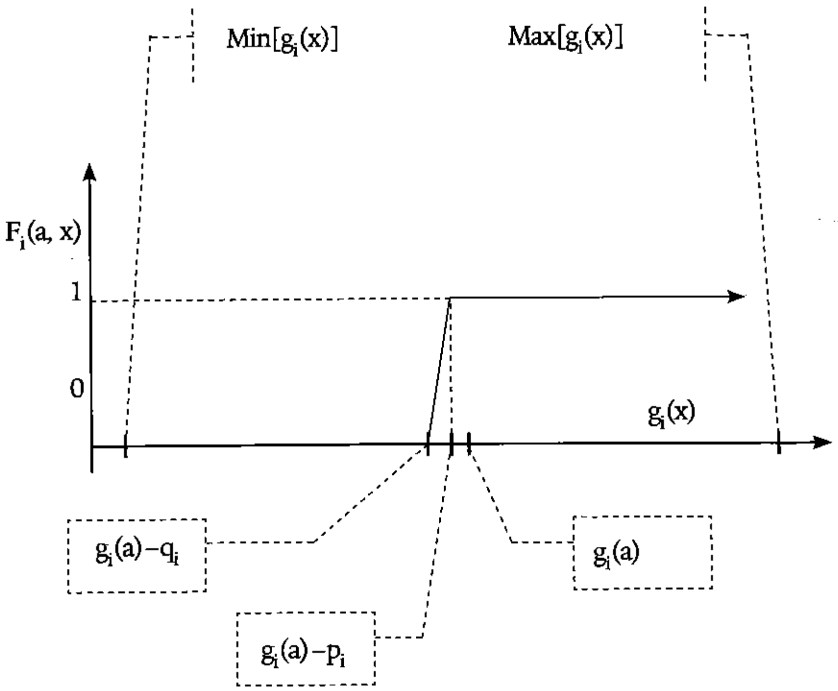
### *5.11.1 Reversão de ordem*

Um dos problemas relacionados aos métodos PROMETHEE é o de reversão de ordem, que em geral pode ocorrer com métodos de comparação par a par. A reversão de ordem pode surgir quando uma alternativa é incluída ou excluída do conjunto A, provocando uma mudança no ordenamento já efetuado entre outras alternativas.

Métodos de comparação par a par estabelecem uma ordem ou pré-ordem com base numa matriz de preferência nxn, que faz uma comparação par a par de todas as alternativas, gerando algum indicador de preferência $p_{ij}$ entre duas alternativas 'i' e 'j'. Outros métodos também se baseiam em comparação par a par, tais como o ELECTRE e o AHP.

Essa é uma questão que o analista deve avaliar junto ao decisor, quando apresenta o resultado de um estudo. Por outro lado, deve-se observar que os métodos de sobreclassificação geram relações não transitivas. É natural haver reversão de ordem se a estrutura de preferência se baseia em relações não transitivas. Isto ocorre na pré-ordem ou ordem final apresentada pelos métodos, pois

Figura 5.13 – Valores de limiares compatíveis




No entanto, a situação mostrada na Figura 5.14 pode representar uma distorção, visto que o valor de limiar $q_i$ está numa dimensão relativamente grande para a faixa de variação de $g_i(x)$. Como mostrado na Figura 5.14, para esse valor de $q_i$ o modelo atua, em parte, como uma função de agregação aditiva, sendo a função valor intracritério linear. Nesse caso, pode-se dizer que quando o valor de $g_i(x)$ se encontra na faixa entre $g_i(a) - q_i$ e $g_i(a) - p_i$, há um processo compensatório na forma como os valores de $g_i(x)$ e $g_i(a)$ são comparados.

$$\phi(a) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} [F_i(a, b) - F_i(b, a)]$$

Essa equação pode ser considerada como um modelo aditivo na qual a função valor $g_i(a)$ tem a seguinte forma:

$$g_i(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} [F_i(a, b) - F_i(b, a)]$$

Para essa função valor deve-se lembrar que $F_i(a,b) = 0$, quando $g_i(a) \leq g_i(b)$, para a função $F_i(a,b)$ do tipo 1.

Uma questão importante que merece destaque é quanto à escolha da função $F_i(a,b)$ e mais especialmente à determinação dos parâmetros p e q. Deve-se observar que nem sempre pode ser necessário escolher uma função diferente da função tipo 1. Ou seja, a escolha de outra função deve ocorrer apenas no caso em que o decisor tenha dúvida no estabelecimento de situação de indiferença ou preferência em uma determinada faixa de valores de um dado critério.

No caso de escolha de critério diferente do tipo1, deve-se ter cuidado também na determinação dos limiares de indiferença ou de preferência. Observa-se que esses valores geralmente são pequenos quando se considera a faixa de valores considerada no critério. Ou seja, q e p representam uma faixa de dúvida que o decisor tem no estabelecimento de uma situação de indiferença ou preferência, respectivamente.

As Figuras (5.13 e 5.14) ilustram essa questão, para o critério do tipo 5. Considera-se a comparação entre a alternativa 'a' e qualquer outra alternativa do conjunto, representada por x. O valor de $g_i(a)$ é mostrado na marca central do eixo horizontal. Suponha que o valor de $g_i(x)$ pode variar na faixa entre o mínimo (Min $[g_i(x)]$) e o máximo (Max $[g_i(x)]$) indicado, a depender de que alternativa venha a ser x. Os valores de $g_i(x)$ são mostrados para indicar a amplitude da faixa de valores que $g_i(x)$ pode assumir.

A Figura 5.13 mostra uma condição esperada para esse método. Sendo $p_i$ e $q_i$ valores de limiares, que representam pequenos valores, estes são representados, na Figura, em função de suas distâncias de $g_i(a)$. Essa é uma situação esperada, de forma que o modelo representa o que se espera para um método de sobreclassificação.

- como o método específico em uso influencia; e
- a dependência com a problemática utilizada.

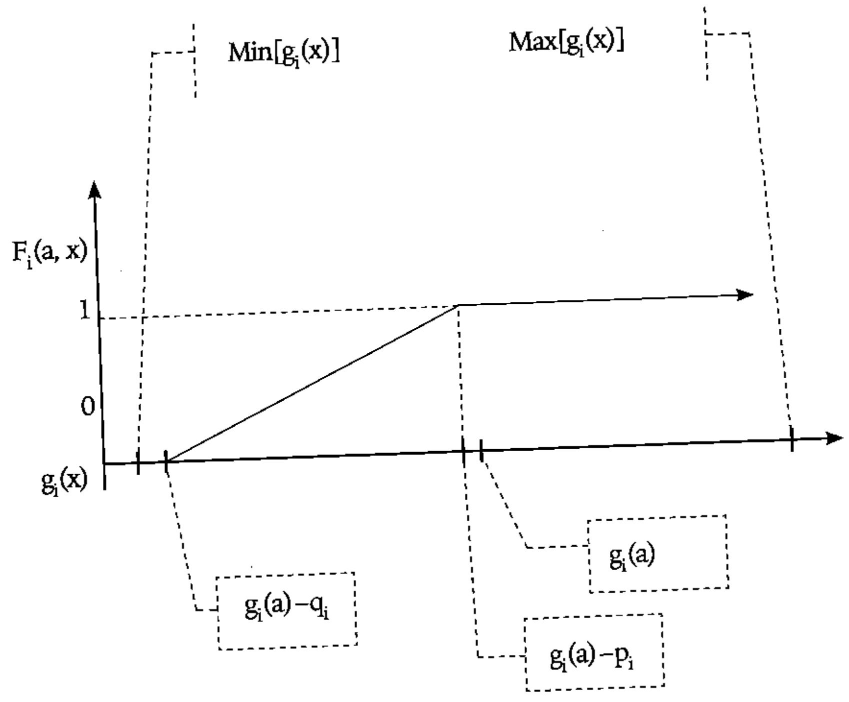
Em relação aos métodos deve-se avaliar, por exemplo no método ELECTRE, como o algoritmo de resolução utiliza esses limiares.

A situação é bem distinta em função do tipo de problemática. Para a problemática de escolha, uma menor precisão pode ser tolerada, visto que o resultado foca em apenas uma alternativa (ou pequeno subconjunto de alternativas). A análise de sensibilidade pode ajudar muito na correção de desvios. A depender do contexto, não haveria grande perda no processo decisório, se uma alternativa que deveria estar em segundo lugar for escolhida ao invés da que deveria estar em primeiro lugar. Em princípio, isso só ocorreria para duas alternativas muito próximas. Essa questão pode ser avaliada por meio da análise de sensibilidade.

Para a problemática de ordenação, os valores de limiares são um pouco mais críticos, pois podem alterar a ordem de alternativas facilmente, especialmente quando estas estão com valores próximos. Mesmo assim, por terem valores próximos, não seria muito crítica uma troca na ordem de algumas poucas alternativas. Isso também pode ser avaliado por meio da análise de sensibilidade.

Para a problemática de classificação, os valores de limiares são bem mais críticos, pois podem alterar o posicionamento de uma alternativa em uma classe. Neste caso, a diferença entre classes é tão grande, quanto menor o número de classes considerado no processo. Uma mudança de classe pode representar um erro maior no processo decisório. Esse problema tende a ocorrer com alternativas que se localizam próximas à fronteira entre duas classes. Para essa problemática, o cuidado no processo de elicitação deve ser bem maior e a análise de sensibilidade pode exercer um papel mais relevante.

Figura 5.14 – Valores de limiares não compatíveis com o conceito de limiar




### 5.11.3 *Elicitação de limiares de preferência e indiferença*

Ainda há muito por se fazer, para o estabelecimento de procedimentos formais para a elicitação dos limiares de preferência e indiferença. Todavia, há algumas indicações e questões básicas que devem ser observadas no estabelecimento desses limiares.

O termo "*limiar*" (no contexto de medição) indica intensidade mínima necessária para se produzir efeito. Esse significado também está associado à diferença entre duas medidas, indicando a diferença mínima entre duas medidas para serem percebidas como distintas.

Então, esses valores de limiares devem representar valores mínimos, no contexto da faixa de valores de consequência considerados e da escala de avaliação utilizada. Impactos de imprecisão no processo de elicitação devem ser avaliados por procedimentos de análise de sensibilidade.

No processo de elicitação, deve-se verificar o efeito produzido por esses limiares, nos resultados finais, considerando: