FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

Ettore A. de Barros

1. INTRODUÇÃO

Seja *s* um número complexo qualquer pertencente a um conjunto *S* de números complexos. Dizemos que *s* é uma variável complexa. Se, para cada valor de *s*, o valor de outro número complexo *w* é determinado, então *w* é uma função de variável complexa *s* no conjunto *S*:

$$w = F(s) \qquad (1)$$

O conjunto S é chamado de domínio de F.

A função *F(s)* pode ser expressa pela soma das suas componentes real e imaginária:

$$F(s) = F_x + iF_y \qquad (2)$$

Sendo F(s) um número complexo, obedece às mesmas definições e propriedades estabelecidas no capítulo anterior. Em particular:

- Valor absoluto de *F(s)*: $|F(s)| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$
- Argumento de *F(s)*: $tg^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$

No que segue, utilizaremos uma definição da variável complexa, mais afeita aos desenvolvimentos relativos à teoria de sistemas dinâmicos e sistemas de controle:

$$s = \sigma + i\omega \qquad (3)$$

, onde σ é a parte real e $i\omega$ a parte imaginária da variável complexa.

2. EXEMPLOS DE FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA

2.1 FUNÇÕES POLINOMIAIS E RACIONAIS

Exemplos:

$$F(s) = s^3 + 2s - 3$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

2.2 Função Exponencial

Definimos a função exponencial em termos de funções reais, como segue:

$$e^s = e^\sigma(\cos\omega + isen\omega) \qquad (4)$$

Como casos particulares, tem-se $e^{s} = e^{\sigma}$ que é a função exponencial real, no caso em que $\omega = 0$, e

$$e^{i\omega} = \cos\omega + i sen\omega \qquad (5)$$

, para $\sigma = 0$.

Tal resultado seria obtido na expressão da série de Maclaurin para e^{t}, quando *t* é substituído por $i\omega$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}\omega^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}\omega^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (6)$$

O valor do limite da primeira somatória é $\cos\omega$, enquanto que o limite aplicado à segunda somatória resulta em $sen\omega$. Que a série original (extremo esquerdo de (6)) converge para $e^{i\omega}$, analogamente ao caso real de e^{t}, é demonstrado em [1].

3. LIMITE E DERIVADA

<u>Vizinhança:</u>

Uma vizinhança de um ponto z_0 é o conjunto de todos os pontos para os quais:

$$|s - s_0| \prec \varepsilon \qquad (7)$$

, onde ε é alguma constante positiva. Portanto, uma vizinhança consiste em todos os pontos de um disco, ou região circular, no plano complexo, inclusive o centro z_0, mas, sem incluir o círculo de contorno.

<u>Limite:</u>

Seja *F* uma função definida em todos os pontos de uma vizinhança de um ponto s_0, exceto, eventualmente, o próprio ponto s_0. Dizemos que o limite de *F*, quando *s* tende a s_0, é um número w_0, quando o valor de *F* é arbitrariamente próximo de w_0 para todos os pontos *s* de uma vizinhança de s_0, exceto, eventualmente, $s = s_0$, quando essa vizinhança se torna suficientemente pequena. De forma mais precisa,

$$\lim_{s \to s_0} F(s) = w_0 \qquad (8)$$

se, para cada número positivo ε existe um número positivo δ tal que:

$$|F(s) - w_0| \prec \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |s - s_0| \prec \delta \quad (s \neq s_0)$$

<u>Teorema 1</u>

Sejam

$$F(s) = u(\sigma, \omega) + iv(\sigma, \omega), \qquad s = \sigma + i\omega \quad \text{e} \quad s_0 = \sigma_0 + i\omega_0 \tag{9}$$

Então

Existe o limite de *F(s)* em s_0 e é igual a $u_0 + iv_0$, $\lim_{s \to s_0} F(s) = u_0 + iv_0$, se e somente se os limites de *u* e *v* existem em σ_0 e ω_0 e são iguais a u_0 e v_0, respectivamente.

Teorema 2

Sejam, *F* e *G* funções cujos limites existam em s_0 :

$$\lim_{s \to s_0} F(s) = w_0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{s \to s_0} G(s) = W_0 \tag{10}$$

Então

$$\lim_{s \to s_0} [F(s) + G(s)] = w_0 + W_0 \tag{11}$$

$$\lim_{s \to s_0} [F(s) G(s)] = w_0 W_0 \tag{12}$$

e, se $W_0 \neq 0$, então:

$$\lim_{s \to s_0} \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{w_0}{W_0} \tag{13}$$

Continuidade:

Uma função *F* é contínua num ponto s_0 se, e somente se, todas as três condições abaixo são satisfeitas:

$F(s_0)$ existe.

$\lim_{s \to s_0} F(s)$ existe

$$\lim_{s \to s_0} F(s) = F(s_0) \tag{14}$$

Derivada:

Seja *s* um ponto arbitrário de uma vizinhança de um ponto fixo s_0. Tal vizinhança está contida no domínio de definição de uma certa função ***F*** . Seja $\Delta s = s - s_0$ uma variável complexa. A derivada ***f´***, ou *df/ds* em s_0 é definida pela fórmula:

$$f'(s_0) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(s_0 + \Delta s) - f(s_0)}{\Delta s} \quad \text{, \underline{se o limite existe}.} \tag{15}$$

Note que, se o limite acima existe, a função ***F*** é contínua em s_0, pois:

$$\lim_{\Delta s \to 0}[f(s_0+\Delta s)-f(s_0)] = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{f(s_0+\Delta s)-f(s_0)}{\Delta s}\lim_{\Delta s \to 0}\Delta s = 0 \qquad (16)$$

Assim, ***F*** é necessariamente contínua em todo ponto onde sua derivada existe. Porém, a inversa não vale: a continuidade de uma função num ponto não implica em sua derivabilidade no mesmo ponto.

Fórmulas de Derivação:

$$\frac{d(cte)}{ds} = 0 \qquad \frac{d(s)}{ds} = 1 \qquad (17)$$

$$\frac{d(cteF)}{ds} = (\mathrm{cte}).\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{ds}} \qquad (18)$$

$$\frac{d(F+G)}{ds} = \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{ds}} + \frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{ds}} \qquad (19)$$

$$\frac{d(F.G)}{ds} = G.\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{ds}} + \mathrm{F}.\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{ds}} \qquad (20)$$

$$\frac{d(F/G)}{ds} = \frac{GF'-FG'}{[G]^2} \qquad (21)$$

$$\frac{d(s^n)}{ds} = \mathrm{n.s}^{\mathrm{n-1}} \qquad (22)$$

Relações de Cauchy-Rieman

Suponha que uma função tenha derivada em $s_0 = \sigma_0 + i\omega$. Sejam:

$$F(s) = u(\sigma,\omega) + iv(\sigma,\omega)$$
$$\Delta F(s) = F(s_0+\Delta s) - F(s_0)$$
$$\Delta u = u(\sigma_0+\Delta\sigma,\omega_0+\Delta\omega) - u(\sigma_0,\omega_0)$$
$$\Delta v = v(\sigma_0+\Delta\sigma,\omega_0+\Delta\omega) - v(\sigma_0,\omega_0)$$
$$F'(s) = a + ib$$

Pela definição da derivada, temos:

$$F'(s) = \lim_{\Delta s \to 0}\left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta\sigma + i\Delta\omega}\right) = a + ib \qquad (23)$$

Pelo Teorema 1 da seção de limites, temos:

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ \Delta\omega\to 0}} \mathrm{Re}\left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta\sigma + i\Delta\omega}\right) = a \qquad \lim_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ \Delta\omega\to 0}} \mathrm{Im}\left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta\sigma + i\Delta\omega}\right) = b \qquad (24)$$

Em particular, no caso do caminho $\Delta s = \Delta\sigma$, os limites acima se reduzem a limites de funções de uma só variável, ou seja, $\Delta\sigma$. Neste caso, tem-se:

$$\lim_{\Delta\sigma\to 0}\left(\frac{u(\sigma_0+\Delta\sigma,\omega_0)-u(\sigma_0,\omega_0)}{\Delta\sigma}\right) = a \qquad \lim_{\Delta\sigma\to 0}\mathrm{Im}\left(\frac{v(\sigma_0+\Delta\sigma,\omega_0)-v(\sigma_0,\omega_0)}{\Delta\sigma}\right) = b \qquad (25)$$

Ou seja,

$$\frac{dF(s)}{ds} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta\sigma} + i\frac{\Delta v}{\Delta\sigma}\right) = a + ib; \quad \frac{\partial u}{\partial\sigma} = a \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial\sigma} = b \qquad (26)$$

No caso do caminho $\Delta s = i\Delta\omega$, tere,mos:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\left(-i\frac{\Delta u}{\Delta\omega} + \frac{\Delta v}{\Delta\omega}\right) = ib + a; \quad \frac{\partial u}{\partial\omega} = -b \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial\omega} = a \qquad (27)$$

Como esses dois limites são iguais, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial\sigma} = \frac{\partial v}{\partial\omega} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial\sigma} = -\frac{\partial u}{\partial\omega} \qquad (28)$$

Estas são as relações de Cauchy-Rieman

Obedecer às relações de Cauchy-Rieman é condição necessária e suficiente para a existência da derivada de uma função em determinado ponto:

Teorema 1:

Se a derivada $F'(s)$ de uma função $F(s) = u(\sigma,\omega) + iv(\sigma,\omega)$ existe num ponto "s_0", então as derivadas parciais de primeira ordem, em relação a σ e ω, de cada uma das partes *u* e *v* existem neste ponto e satisfazem às relações de Cauchy-Rieman. Além disso, $F'(s)$ é dada em termos dessas derivadas parciais de acordo com:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{\partial u}{\partial\sigma} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial\sigma} = \frac{\partial v}{\partial\omega} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial\omega} \qquad (29)$$

Teorema 2:

Sejam ***u*** e ***v*** funções reais e univalentes das variáveis σ e ω as quais, juntamente com suas derivadas parciais primeiras, são contínuas num ponto "s_0". Se essas derivadas satisfazem às relações de Cauchy-Rieman neste ponto, então $F'(s_0)$ da função $F(s) = u(\sigma,\omega) + iv(\sigma,\omega)$ existe, sendo $s_0 = \sigma_0 + i\omega_0$.

4. FUNÇÕES ANALÍTICAS

Uma função ***F*** de variável complexa ***s*** se diz *analítica* num ponto s_0, se sua derivada $F'(s)$ existe não só em s_0, como também em todo ponto ***s*** da vizinhança de s_0. ***F*** é analítica num domínio do plano complexo se ela é analítica em todo ponto desse domínio.

Se uma função é analítica em algum ponto de cada vizinhança de um ponto s_0 exceto no próprio ponto s_0, então o mesmo é chamado *ponto singular*, ou singularidade da função. Um ponto singular que resulta em ***F*** e suas derivadas tendendo a infinito é chamado de polo da função. Por exemplo, para

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \tag{30}$$

Os pontos *s = i* e *s = -i* são polos de *F(s).* Veremos que os polos possuem um papel importantíssimo na análise e projeto de sistemas dinâmicos.

Desde que as hipóteses dos 2 teoremas da seção de derivadas sejam observadas num domínio *D* os seus resultados são suficientes para garantir que uma função ***F*** seja analítica nesse mesmo domínio.

Dadas duas funções analíticas ***F*** e ***G*** em um domínio D, sua soma é analítica em D, seu produto é analítico e D seu quociente é analítico no mesmo domínio desde que a função do denominador não se anule em D. Em particular, o quociente ***P/Q*** de dois polinômios é analítico em qualquer domínio no qual $Q(s) \neq 0$.

Referências

1. Churchill R.V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações.* McGraw Hill. 1975.
2. Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno.* Prentice-Hall. 5ª. Ed. 2010.