Lista de exercícios 3

MAT 111 - Cálculo I - BE

22 de abril de 2020

1. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -ax - 1 & \text{se } x < 1 \\ -x^2 + a^2(2-x)x & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

   Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f seja contínua? Justifique sua resposta.

2. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto p dado. Justifique suas respostas.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x \neq 2; \\ L, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ e $p = 2$;   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x}, & \text{se } x \neq 0; \\ L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e $p = 0$.

3. Determine, caso exista, o valor que cada função deve assumir no ponto p dado para que ela seja contínua em p. Justifique suas respostas.

   (a) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ em $p = 3$

   (b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ em $p = 1$

   (c) $h(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ em $p = 2$

4. Se f e g forem funções contínuas, com $f(3) = 5$ e $\lim\limits_{x \longrightarrow 3}[2f(x) - g(x)] = 4$, encontre $g(3)$.

5. Encontre a constante c para que a função seja contínua em $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = \begin{cases} cx + 1, & \text{se } x \leq 3; \\ cx^2 - 1, & \text{se } x > 3. \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - c^2, & \text{se } x < 4; \\ cx + 20, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$

6. Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $D \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in D$. Seja $p \in \mathbb{R}$ tal que sabemos que existe $\lim\limits_{x \longrightarrow p} f(x)$. Decida se cada afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) $\lim\limits_{x \longrightarrow p} f(x) > 0.$ (b) $\lim\limits_{x \longrightarrow p} f(x) = 0.$ (c) $\lim\limits_{x \longrightarrow p} f(x) < 0.$

7. Prove ou dê contra exemplo para cada uma das afirmações a seguir, onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções:
   (a) Se f e $f \circ g$ são contínuas, então g é contínua.
   (b) Se existe $\lim\limits_{x \longrightarrow p} f(x)$, então f é contínua em p.

8. Considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f não é contínua em 0.

9. Seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} \leq f(x) + 1 \leq \frac{x^6}{3} + \sqrt{x^2 + 1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x);$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \cos\left(\dfrac{1}{x + x^2}\right).$

10. Seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq 2|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^3)}{x}$.

11. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{r^4 - r^2 + 1}{r^5 + r^3 - r};$

(b) $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{6t^2 + 5t}{(1 - t)(2t - 3)};$

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x}}{4x + 1};$

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}.$

(e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1};$

(f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2};$

(g) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x - 1|}{x - 1};$

(h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x - 1|}{x - 1};$

(i) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{4}{x - 3};$

(j) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{5}{3 - x};$

(k) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x - 3)^3};$

(l) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x + 3}{x^2 - 1};$

(m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|};$

(n) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[5 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right];$

(o) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x};$

(p) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x};$

(q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{x + \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x};$

(r) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 - 3x + 2};$

(s) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{3x - 8} - 2};$

(t) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg}(3x) \operatorname{cossec}(6x);$

(u) $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \cos \dfrac{1}{x};$

(v) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{7x^6 + 5x^4 + 7}}{x^4 + 2};$

(w) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x};$

(x) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - p^2)}{x - p};$

(y) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x};$

(z) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}.$

12. (Extra) Escreva formalmente o que quer dizer a negação da afirmação: $L = \lim_{x \longrightarrow p} f(x)$.

13. (Extra) Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$. Seja p tal que $\lim_{x \longrightarrow p} = L > 0$. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que, se $|p - y| < \epsilon$ para $y \in D$, então $f(y) > 0$.

14. (Extra) Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$. Mostre que, dado $p \in \mathbb{R}$, temos que $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \in p}(f(x) - L) = 0$.

15. (Extra) Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$ uma função. Mostre que, dado $p \in \mathbb{R}$, temos que $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = 0$ se, e somente se, $\lim_{x \longrightarrow p} |f(x)| = 0$.

16. (Extra) Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Seja $p \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \lim_{x \longrightarrow p} h(x) = L$. Mostre que $\lim_{x \longrightarrow p} g(x) = L$.