EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM 1 - TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

O objetivo aqui é apresentar um esboço da demonstração do seguinte teorema fundamental

Teorema 1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\Phi : I \to \mathbb{R}$ com $(x, \Phi(x)) \in \Omega$, para cada $x \in I$, que 'e solução do problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= f(x, y). \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases} \tag{1}$$

O primeiro passo é transformar a equação diferencial em outra *do tipo integal.*

Lema 2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Então, uma função $\Phi : I \to \mathbb{R}$ é uma solução do problema de valor inicial 1 se e somente se for uma solução da equação integral:*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \tag{2}$$

Demonstração: Teorema Fundamental do Cálculo. □

Esboço da demonstração do Teo 1: A ideia é usar o *Método das Aproximações sucessivas* .

Se definimos o **operador integral**: $y \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$, então que queremos encontrar é uma função Φ que seja um *ponto*

Date: April 3, 2020.

fixo do operador T, ou seja, tal que $y(x) = Ty(x), \quad$ para todo x em algum intervalo I.

Inicialmente, tomamos $y = y_0$ a função constante, que tem a vantagem de satisfazer a condição inicial. Em seguida, consideramos a função $y_1(x)$ que é a transformada de y_0 por aplicação do operador integral

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, d\, s,$$

Se $y_1(x) = y_0$ em algum intervalo I contendo x_0, o problema está resolvido.

Se não, prosseguimos, definindo:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\, d\, s.$$

e sucessivamente:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\, d\, s.$$

Para finalizar a demonstração, precisamos mostrar duas coisas.

- O processo pode ser repetido para todo n.
- O processo converge para alguma função Φ.

Se esses dois fatos puderem ser demonstrados, então teremos necessariamente

$y_n \to \Phi$ e $T(y_n) \to T(\Phi)$ e da **continuidade do operador** T no espaço das funções definidas em algum intervalo I contendo x_0. $T(y_n) \to T(\Phi)$.

Por unicidade do limite, segue que $\Phi = T(\Phi)$, o que termina a demonstração. $\square$