EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM 1

1. Coeficientes constantes

São equações do tipo:

$$\frac{d\,y}{d\,x} + ay = f(x). \tag{1}$$

sendo a uma constante real e f função contínua definida em um intervalo $I = (a, b)$.

Quando $f(x) \equiv 0$, temos a equação

$$\frac{d\,y}{d\,x} + ay = 0. \tag{2}$$

que é a *equação homogênea* associada a (1).

Na forma diferencial, teríamos:

$$(ay - f(x))\,d\,x + 1\,dy = 0. \tag{3}$$

ou seja: $P(x)dx + Q(x)\,d\,y$, sendo $P(x, y) = (ay - f(x))$. e $Q(x, y) = 1$

Portanto $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -a$. e a equação **não é exata**.

Entretanto, $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = -a$. *não depende de* x.

Assim, temos um fator integrante $\mu(x) = e^{-\int -a\,d\,x} = e^{ax}$.

e a equação

$$e^{ax}(ay - f(x))\,d\,x + e^{ax} \cdot 1\,dy = 0 \tag{4}$$

é agora, **exata**.

Date: April 3, 2020.

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = e^{ax}(ay - f(x)) \quad \text{(I)} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{ax} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

obtemos de (II) :

$$\Phi(x, y) = y \cdot e^{ax} + K(x)$$

e substituindo em (I) $K'(x) = -e^{ax} f(x) \Rightarrow K(x) = -\int e^{ax} f(x)\, d\, x + c$.

Segue que

$$\Phi(x, y) = y \cdot e^{ax} - \int e^{ax} f(x)\, d\, x$$

anoindent e as soluções da equação (1) são dadas por:

$$\Phi(x, y) = C \Rightarrow y e^{ax} - \int e^{ax} f(x)\, d\, x = C,$$

ou seja:

$$y = C \cdot e^{-ax} + e^{-ax} \int e^{ax} f(x)\, d\, x.$$

Observação 1.1. (1) *O fator integrante* e^{ax} *da equação* (1) *é solução da equação* $\dfrac{d\, y}{d\, x} - ay = 0$.

(2) *A solução geral é a soma de dois fatores:* $C \Rightarrow y e^{ax}$ *que é solução da equação homogênea associada* (2) *e* $e^{-ax} \int e^{ax} f(x)\, d\, x$ *que é uma solução particular da equação* (1).

Sabendo que o fator integrante é e^{ax}, podemos resolver o problema de forma ligeiramente diferente, sem passar pela equação na forma diferencial (3). Multiplicando (1) por e^{ax} temos:

$$e^{ax}\frac{d\,y}{d\,x} + ae^{ax}y = e^{ax}f(x) \Rightarrow . \tag{5}$$

$$\begin{aligned} e^{ax}\frac{d\,y}{d\,x} + ae^{ax}y = e^{ax}f(x) &\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{ax}y\right) = e^{ax}f(x) \\ &\Rightarrow e^{ax}y = \int e^{ax}f(x)\,d\,x + C \\ &\Rightarrow y = C \cdot e^{-ax} + e^{-ax}\int e^{ax}f(x)\,d\,x, \end{aligned}$$

Suponhamos que $x_0 \in I$ e $y(x)$ é solução local do P.V.I

$$\begin{cases} \frac{d\,y}{d\,x} + a(x)y &= f(x). \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases} \tag{6}$$

Procedendo como acima, obteremos novamente

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax}y\right) = e^{ax}f(x)$$

.

E, levando em conta a condição inicial, obteremos por integração:

$$e^{ax}y(x) = e^{ax_0}y(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{as}f(s)\,d\,s \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{-a(x-x_0)}y(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-a(x-s)}f(s)\,d\,s \tag{7}$$

Portanto, a solução do P.V.I. (6) tem que ser dada por esta fórmula. Por outro lado, derivando a expressão obtida para $y(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= -ae^{-a(x-x_0)}y(x_0) + -a \cdot \int_{x_0}^{x} e^{-a(x-s)} f(s)\, d\, s + e^{-a(x-x)} f(x) \\ &= -ay(x) + f(x). \end{aligned}$$

Concluímos que o problema de valor inicial *tem uma única solução dada por* (7) *que está definida em todo o intervalo I onde a equação* (1) *está definida.*

2. Coeficientes variáveis

Consideremos novamente a equação linear de primeira ordem

$$\frac{d\,y}{d\,x} + a(x)y = f(x). \tag{8}$$

sendo agora a e f funcções contínuas definidas em um intervalo $I = (a, b)$.

Quando $f(x) \equiv 0$, temos novamente a equação hmogênea associada

$$\frac{d\,y}{d\,x} + a(x)y = 0. \tag{9}$$

que é a *equação homogênea* associada a (1).

Tendo em vista o que vimos na seção anterior, vamos multiplicar a equação (8) pela solução da equação (homogênea) $\dfrac{d\,y}{d\,x} - a(x)y = 0$. A solução geral agora é dada por: $\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx}$.

Suponhamos que $x_0 \in I$ e $y(x)$ é solução local do P.V.I

$$\begin{cases} \frac{d\,y}{d\,x} + a(x)y &= f(x). \\ \qquad y(x_0) &= y_0. \end{cases} \tag{10}$$

Multiplicando pela solução particular (fator integrante)

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds}.$$

e procedendo como no caso de coeficientes constantes, obteremos agora

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right) = \mu(x)f(x)$$

.

E, levando em conta a condição inicial, obteremos por integração:

$$\mu(x)y(x) = \mu(x_0)y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mu(s)f(s)\, d\, s \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\mu(s)}{\mu(x)}f(s)\, d\, s$$

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds}y(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{s}^{x} a(\tau)\, d\,\tau}f(s)\, d\, s \tag{11}$$

Concluímos novamente que o problema de valor inicial *tem uma única solução dada por* (7) *que está definida em todo o intervalo* I *onde a equação* (8) *está definida.*

Exercício 2.1. *Determinar a solução geral da equação:*

$$\frac{d\, y}{d\, x} + \frac{2x}{1-x^2}y = \frac{x}{1-x^2}.$$

Observemos inicialmente que o domínio onde a equação está definida é $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \neq 1\}$.

O fator integrante agora será

$$\mu(x) = e^{\int a(x)\, dx} = e^{\int \frac{2x}{1-x^2}\, dx} = e^{-\ln|1-x^2|} = \frac{1}{|1-x^2|},$$

que também está definido para $|x| \neq 1$.

Para facilitar os cálculos, vamos supor primeiro $-1 < x < 1$.
Nesse caso, o fator integrante se escreve como

$$\mu(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Multiplicando a equação por μ, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2}\frac{d\,y}{d\,x} + \frac{2x}{(1-x^2)^2}y &= \frac{x}{(1-x^2)^2} \Leftrightarrow \\
\frac{d}{d\,x}\left(\frac{1}{1-x^2}\cdot y\right) &= \frac{x}{(1-x^2)^2} \Leftrightarrow \\
\frac{1}{1-x^2}\cdot y &= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x^2)} + C \Leftrightarrow \\
y &= \frac{1}{2} + C(1-x^2)
\end{aligned}$$

$|x| > 1$.
Nesse caso, o fator integrante se escreve como

$$\mu(x) = \frac{-1}{1-x^2}.$$

Multiplicando a equação por μ, obtemos novamente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2}\frac{d\,y}{d\,x} + \frac{2x}{(1-x^2)^2}y &= \frac{x}{(1-x^2)^2} \Leftrightarrow \\
y &= \frac{1}{2} + C(1-x^2)
\end{aligned}$$

Em particular, a solução do P.V.I.

$$(12) \qquad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1-x^2} y &= \frac{x}{1-x^2} \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

é dada por $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - x^2)$, **definida no intervalo** $-1 < x < 1$.