Vimos na última aula que no calibre de Lorentz, os potenciais escalar e vetor satisfazem as seguintes equações diferenciais

03/04/2020

(1)

Vimos na última aula que no calibre de Lorentz, os potenciais escalar e vetor satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Vimos na última aula que no calibre de Lorentz, os potenciais escalar e vetor satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ou seja, equações de onda não-homogêneas.

03/04/2020

Vimos na última aula que no calibre de Lorentz, os potenciais escalar e vetor satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ou seja, equações de onda não-homogêneas.

As soluções das eqs acima são dadas pelos potenciais retardados

$$A(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'$$

com $t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c}$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'$$

03/04/2020

1

Vimos na última aula que no calibre de Lorentz, os potenciais escalar e vetor satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

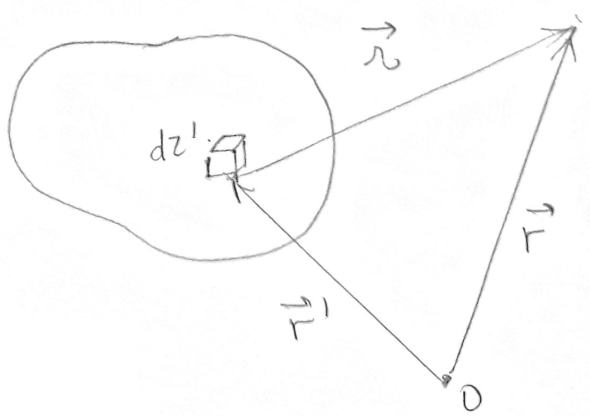
ou seja, equações de onda não-homogêneas.

As soluções das eqs acima são dadas pelos potenciais retardados

$$A(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

com $t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c}$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$



03/04/2020

1

Vimos na última aula que no calibre de Lorentz, os potenciais escalar e vetor satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ou seja, equações de onda não-homogêneas.

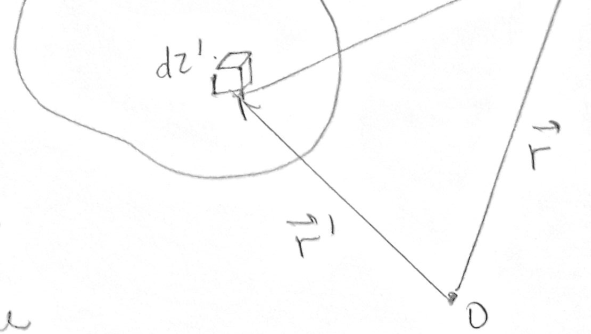
As soluções das eqs acima são dadas pelos potenciais retardados

$$A(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

com $t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c}$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

As expressões acima indicam uma consistência explícita com o fato de que qualquer sinal eletromagnético no vácuo deve se propagar com a velocidade da luz c.



Vimos o exemplo dos potenciais

$$V = 0 \qquad \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 k}{4c} (ct - |x|)^2 \, \hat{z} \, , & |x| < ct \\ 0 \, , & |x| > ct \end{cases}$$

Vimos o exemplo dos potenciais

$$V = 0 \qquad \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2\,\hat{z}, & |x| < ct \\ 0, & |x| > ct \end{cases}$$

cujos campos eletromagnético associado foi calculado por meio de

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad e \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Vimos o exemplo dos potenciais

$$V = 0 \qquad \vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2 \hat{z}, & |x| < ct \\ 0, & |x| > ct \end{cases}$$

cujos campos eletromagnético associado foi calculado por meio de

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad e \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

fornecendo

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 k}{2}(ct - |x|)\hat{z} = E_z \hat{z}$$

Vimos o exemplo dos potenciais

$$V = 0 \qquad \vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2 \hat{z} & , |x| < ct \\ 0 & , |x| > ct \end{cases}$$

cujos campos eletromagnético associado foi calculado por meio de

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad e \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

fornecendo

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 k}{2}(ct - |x|)\hat{z} = E_z \hat{z}$$

$$\vec{B} = B_y \hat{y} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{2c}(ct - |x|)\hat{y} & , x > 0 \\ -\frac{\mu_0 k}{2c}(ct - |x|)\hat{y} & , x < 0 \end{cases}$$

Vimos o exemplo dos potenciais

$$V = 0 \qquad \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 K}{4c}(ct - |x|)^2 \hat{z} & , |x| < ct \\ 0 & , |x| > ct \end{cases}$$

cujos campos eletromagnético associado foi calculado por meio de

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad e \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

fornecendo

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 K}{2}(ct - |x|)\hat{z} = E_z \hat{z}$$

$$\vec{B} = B_y \hat{y} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|)\hat{y} & , x > 0 \\ -\dfrac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|)\hat{y} & , x < 0 \end{cases}$$

Ou seja, o campo magnético $\vec{B}$ possui uma descontinuidade no plano $x = 0$ que, por sua vez, deve ser causada por uma densidade superficial de corrente sobre esse plano.

Vimos o exemplo dos potenciais

$$V = 0 \qquad \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2 \, \hat{z} & , \ |x| < ct \\ 0 & , \ |x| > ct \end{cases}$$

cujos campos eletromagnético associado foi calculado por meio de

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad e \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

fornecendo

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 k}{2}(ct - |x|)\,\hat{z} = E_z \, \hat{z}$$

$$\vec{B} = B_y \, \hat{y} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 k}{2c}(ct - |x|)\,\hat{y} & , \ x > 0 \\ -\dfrac{\mu_0 k}{2c}(ct - |x|)\,\hat{y} & , \ x < 0 \end{cases}$$

Ou seja, o campo magnético $\vec{B}$ possui uma descontinuidade no plano $x = 0$ que, por sua vez, deve ser causada por uma densidade superficial de corrente sobre esse plano.

Usando as condições de contorno apropriadas mostramos que essa corrente é dependente do tempo e dada por

$$\vec{K} = k t \, \hat{z}$$

Vimos o exemplo dos potenciais

$$V = 0 \qquad \vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 K}{4c}(ct - |x|)^2\, \hat{z} & , |x| < ct \\ 0 & , |x| > ct \end{cases}$$

cujos campos eletromagnético associado foi calculado por meio de

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad e \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

fornecendo

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 K}{2}(ct - |x|)\,\hat{z} = E_z\,\hat{z}$$

$$\vec{B} = B_y\,\hat{y} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|)\,\hat{y} & , x > 0 \\ -\dfrac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|)\,\hat{y} & , x < 0 \end{cases}$$

Ou seja, o campo magnético $\vec{B}$ possui uma descontinuidade no plano $x = 0$ que, por sua vez, deve ser causada por uma densidade superficial de corrente sobre esse plano.

Usando as condições de contorno apropriadas mostramos que essa corrente é dependente do tempo e dada por

$$\vec{K} = Kt\,\hat{z}$$

Pergunta: essa é a única densidade de corrente presente?

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x = 0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x = 0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Então em P:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z} =$$

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x = 0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Então em P:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \hat{z}$$

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x = 0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Então em P:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}\hat{z}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|)\frac{\partial |x|}{\partial x}$$

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x = 0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Então em P:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}\hat{z}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|)\frac{\partial |x|}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|), & x > 0 \\ \frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|), & x < 0 \end{cases}$$

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x = 0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Então em P:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}\hat{z}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|)\frac{\partial |x|}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct-|x|), & x > 0 \\ \frac{\mu_0 K}{2c}(ct-|x|), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = \frac{\mu_0 K}{2c}$$

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x = 0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Então em P:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}\hat{z}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|)\frac{\partial |x|}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|), & x > 0 \\ \frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = \frac{\mu_0 K}{2c} \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0 K}{2c}\hat{z}$$

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x = 0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Então em P:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \hat{z}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|)\frac{\partial |x|}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|), & x > 0 \\ \frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = \frac{\mu_0 K}{2c} \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0 K}{2c}\hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 K}{2}(ct - |x|)\hat{z}$$

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x = 0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Então em P:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \hat{z}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 K}{2c} (ct - |x|) \frac{\partial |x|}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2c} (ct - |x|), & x > 0 \\ \frac{\mu_0 K}{2c} (ct - |x|), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = \frac{\mu_0 K}{2c} \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0 K}{2c} \hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 K}{2} (ct - |x|) \hat{z}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 K}{2} c \hat{z}$$

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x = 0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Então em P:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \hat{z}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|)\frac{\partial |x|}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|), & x > 0 \\ \frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = \frac{\mu_0 K}{2c} \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0 K}{2c}\hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 K}{2}(ct - |x|)\hat{z}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 K}{2} c \hat{z}$$

Portanto, p/ qualquer ponto P fora do plano $x = 0$, temos

$$\frac{\mu_0 K}{2c}\hat{z} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mu_0 K}{2} c \hat{z}\right) = \vec{0}$$

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x = 0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Então em P:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \hat{z}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|)\frac{\partial |x|}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|), & x > 0 \\ \frac{\mu_0 K}{2c}(ct - |x|), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = \frac{\mu_0 K}{2c} \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0 K}{2c}\hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 K}{2}(ct - |x|)\hat{z}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 K}{2} c \hat{z}$$

Portanto, p/ qualquer ponto P fora do plano $x = 0$, temos

$$\frac{\mu_0 K}{2c}\hat{z} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mu_0 K}{2} c \hat{z}\right) = \vec{0} = -\mu_0 \vec{J} \Rightarrow \vec{J} = \vec{0}$$

Voltemos à eq. diferencial p/ $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Tomemos um ponto P no espaço tal que $x \neq 0$, pois sobre o plano $x=0$, a derivada espacial de $\vec{A}$ é descontínua

Então em P:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_z \hat{z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}\hat{z}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct-|x|)\frac{\partial |x|}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2c}(ct-|x|), & x>0 \\ \frac{\mu_0 K}{2c}(ct-|x|), & x<0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = \frac{\mu_0 K}{2c} \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0 K}{2c}\hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 K}{2}(ct-|x|)\hat{z}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 K}{2} c\,\hat{z}$$

Portanto, p/ qualquer ponto P fora do plano $x=0$, temos

$$\frac{\mu_0 K}{2c}\hat{z} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mu_0 K}{2}c\,\hat{z}\right) = \vec{0} = -\mu_0 \vec{J} \Rightarrow \vec{J} = \vec{0}$$

Ou seja, a única densidade de corrente não-nula é superficial e encontra-se sobre o plano $x=0$, dada por

$$\vec{K} = Kt\,\hat{z}$$

É importante notar que além dos potenciais retardados, as eqs satisfeitas por V e $\vec{A}$ também admitem como soluções os chamados potenciais avançados

$$V_a(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_a)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

$$\vec{A}_a(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_a)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

É importante notar que além dos potenciais retardados, as eqs satisfeitas por V e $\vec{A}$ também admitem como soluções os chamados potenciais avançados

$$V_a(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_a)}{r}\,d\tau'$$

com $t_a = t + r/c$

$$\vec{A}_a(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_a)}{r}\,d\tau'$$

Tempo avançado

É importante notar que além dos potenciais retardados, as eqs satisfeitas por V e $\vec{A}$ também admitem como soluções os chamados potenciais avançados

$$V_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_a)}{r} \, d\tau'$$

com $t_a = t + r/c$

Tempo avançado

$$\vec{A}_a(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_a)}{r} \, d\tau'$$

Tais potenciais, entretanto, violam claramente o princípio da causalidade que diz, essencialmente, que a causa precede o efeito. Dessa forma, os potenciais avançados, apesar de consistentes com as eqs. de Maxwell, não possuem significado físico.

É importante notar que além dos potenciais retardados, as eqs satisfeitas por V e $\vec{A}$ também admitem como soluções os chamados potenciais avançados

$$V_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,', t_a)}{r} d\tau'$$

com $t_a = t + r/c$

$$\vec{A}_a(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,', t_a)}{r} d\tau'$$

Tempo avançado

Tais potenciais, entretanto, violam claramente o princípio da causalidade que diz, essencialmente, que a causa precede o efeito. Dessa forma, os potenciais avançados, apesar de consistentes com as eqs. de Maxwell, não possuem significado físico.

— // —

Exemplo

Determinar os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ gerados por um fio neutro percorrido pela corrente

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ I_0, & t > 0 \end{cases}$$

O fio é infinito

É importante notar que além dos potenciais retardados, as eqs satisfeitas por V e $\vec{A}$ também admitem como soluções os chamados potenciais avançados

$$V_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,', t_a)}{r}\, d\tau'$$

com $t_a = t + r/c$ ← Tempo avançado

$$\vec{A}_a(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,', t_a)}{r}\, d\tau'$$

Tais potenciais, entretanto, violam claramente o princípio da causalidade que diz, essencialmente, que a causa precede o efeito. Dessa forma, os potenciais avançados, apesar de consistentes com as eqs. de Maxwell, não possuem significado físico.

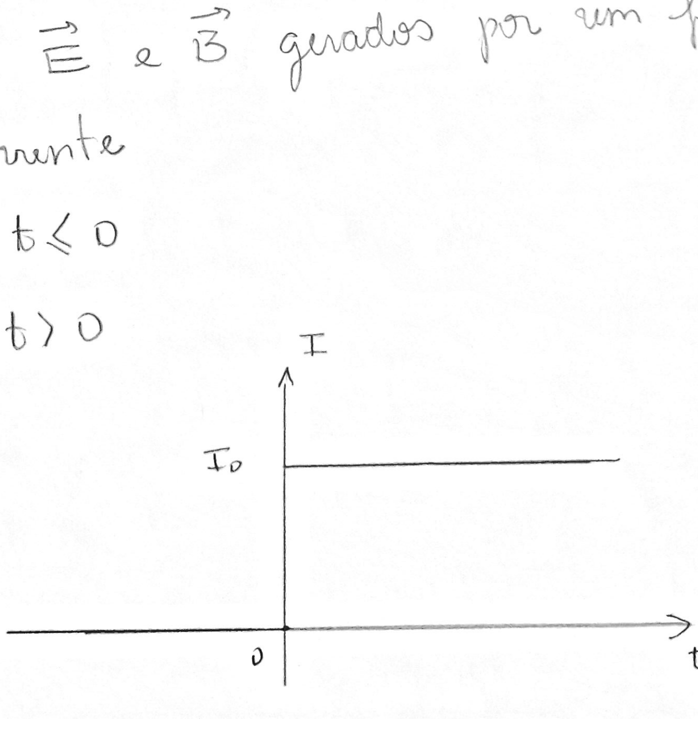
—— // ——

Exemplo

Determinar os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ gerados por um fio neutro percorrido pela corrente

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ I_0, & t > 0 \end{cases}$$

O fio é infinito



Como o fio é neutro, $\rho = 0$ e o potencial escalar (5)
V é também nulo

$$V = 0$$

Como o fio é neutro, $\rho = 0$ e o potencial escalar V é também nulo (5)

$$V = 0$$

A solução tipo potencial vetor retardado p/ um ponto P a uma a uma distância s do fio é

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{\mathscr{r}} dz$$

Como o fio é neutro, $\rho = 0$ e o potencial escalar (5)
V é também nulo

$$V = 0$$

A solução tipo potencial vetor retardado p/ um ponto P a uma à uma distância s do fio é

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{r} dz$$

onde o eixo for orientado ao longo do fio e, portanto, $\vec{A}$ deve apontar tbém nessa direção, isto é, paralelo a $\vec{I}$.

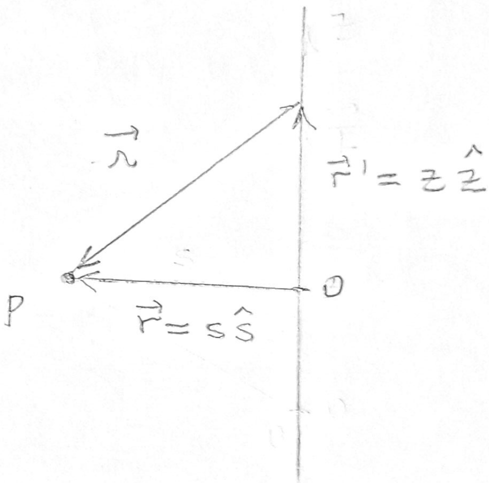
Como o fio é neutro, $\rho = 0$ e o potencial escalar V é também nulo

$$V = 0$$

A solução tipo potencial vetor retardado p/ um ponto P a uma à uma distância s do fio é

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{\mathscr{r}} dz$$

onde o eixo z for orientado ao longo do fio e, portanto, $\vec{A}$ deve apontar tbém nessa direção, isto é, paralelo a $\vec{I}$.



Como o fio é neutro, $\rho = 0$ e o potencial escalar (5)
V é também nulo

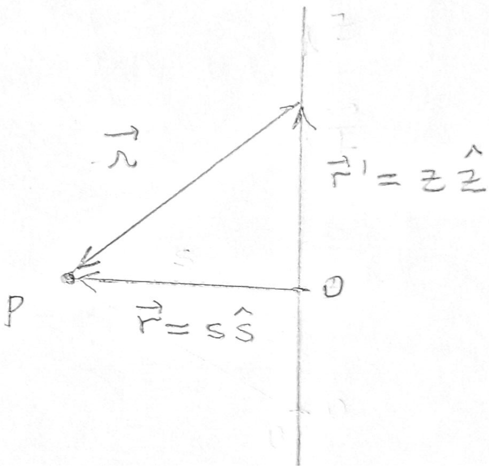
$$V = 0$$

A solução tipo potencial vetor retardado p/ um ponto P a uma à uma distância s do fio é

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(t_r)}{\eta}\,dz$$

onde o eixo for orientado ao longo do fio e, portanto, $\vec{A}$ deve apontar tbém nessa direção, isto é, paralelo a $\vec{I}$.

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(t-\eta/c)}{\eta}\,dz$$



Como o fio é neutro, $\rho = 0$ e o potencial escalar (5)
V é também nulo

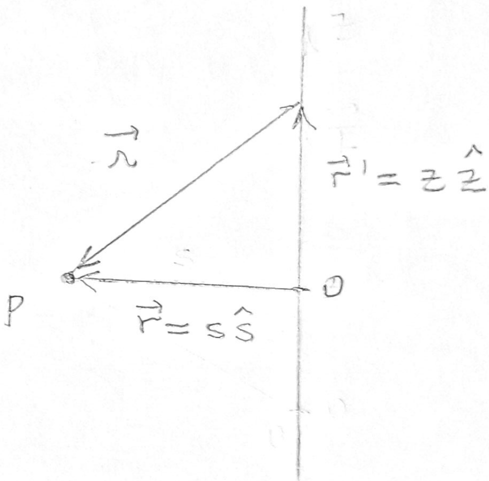
$$V = 0$$

A solução tipo potencial vetor retardado p/ um ponto P a uma à uma distância s do fio é

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(t_r)}{\mathscr{r}}dz$$

onde o eixo foi orientado ao longo do fio e, portanto, $\vec{A}$ deve apontar tbém nessa direção, isto é, paralelo a $\vec{I}$.

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(t-\mathscr{r}/c)}{\mathscr{r}}dz$$



Devido à velocidade finita da luz, p/ $t < s/c$ nenhum sinal eletromagnético pode ter chegado até P, já que p/ $t \leq 0$ não havia corrente no fio

Como o fio é neutro, $\rho = 0$ e o potencial escalar V é também nulo

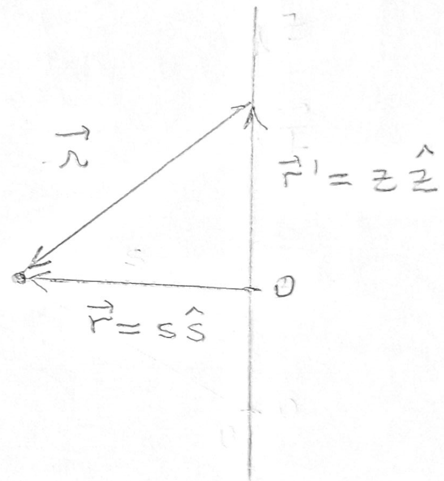
$$V = 0$$

A solução tipo potencial vetor retardado p/ um ponto P a uma à uma distância s do fio é

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(t_r)}{\mathscr{r}}\,dz$$

onde o eixo foi orientado ao longo do fio e, portanto, $\vec{A}$ deve apontar também nessa direção, isto é, paralelo a $\vec{I}$.

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(t-\mathscr{r}/c)}{\mathscr{r}}\,dz$$



Devido à velocidade finita da luz, p/ $t < s/c$ nenhum sinal eletromagnético pode ter chegado até P, já que p/ $t \leq 0$ não havia corrente no fio

Já p/ um instante $t > s/c$ nem todas as regiões do fio devem contribuir p/ o potencial em P.

Como o fio é neutro, $\rho = 0$ e o potencial escalar V é também nulo (5)

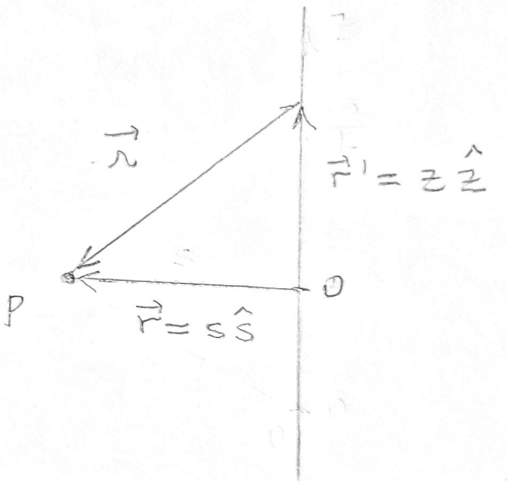
$$V = 0$$

A solução tipo potencial vetor retardado p/ um ponto P a uma à uma distância s do fio é

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(t_r)}{\imath}\,dz$$

onde o eixo foi orientado ao longo do fio e, portanto, $\vec{A}$ deve apontar tbém nessa direção, isto é, paralelo a $\vec{I}$.

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(t-\imath/c)}{\imath}\,dz$$



Devido à velocidade finita da luz, p/ $t < s/c$ nenhum sinal eletromagnético pode ter chegado até P, já que p/ $t \leq 0$ não havia corrente no fio

Já p/ um instante $t > s/c$ nem todas as regiões do fio devem contribuir p/ o potencial em P. Nesse instante, apenas pontos tais que

$$|z| \leq \sqrt{(ct)^2 - s^2}$$

contribuem p/ $\vec{A}(\vec{r},t)$

Para $|z| > \sqrt{(ct)^2 - s^2}$:

6

$$ct_r = ct - r = ct - \sqrt{s^2 + z^2}$$

Para $|z| > \sqrt{(ct)^2 - s^2}$: (6)

$$ct_r = ct - r = ct - \sqrt{s^2 + z^2} < 0 \Rightarrow I(t_r) = 0.$$

Para $|z| > \sqrt{(ct)^2 - s^2}$:

$$ct_r = ct - \mathscr{r} = ct - \sqrt{s^2 + z^2} < 0 \Rightarrow I(t_r) = 0$$

Então, podemos escrever

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\sqrt{(ct)^2 - s^2}}^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}}$$

Para $|z| > \sqrt{(ct)^2 - s^2}$:

$$ct_r = ct - \mathscr{r} = ct - \sqrt{s^2 + z^2} < 0 \Rightarrow I(t_r) = 0$$

Então, podemos escrever

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\sqrt{(ct)^2 - s^2}}^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_{0}^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}} \qquad (u = z/s)$$

Para $|z| > \sqrt{(ct)^2 - s^2}$:

$$ct_r = ct - \mathscr{r} = ct - \sqrt{s^2 + z^2} < 0 \Rightarrow I(t_r) = 0$$

Então, podemos escrever

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\sqrt{(ct)^2 - s^2}}^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}} \qquad (u = z/s)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^{\frac{1}{s}\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \qquad (u = tg\,\theta)$$

Para $|z| > \sqrt{(ct)^2 - s^2}$: (6)

$$ct_r = ct - r = ct - \sqrt{s^2 + z^2} < 0 \Rightarrow I(t_r) = 0$$

Então, podemos escrever

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\sqrt{(ct)^2 - s^2}}^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}} \qquad (u = z/s)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^{\frac{1}{s}\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \qquad (u = tg\,\theta)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^{\beta} \sec\theta \, d\theta \qquad \beta = \text{atan}\left(\frac{1}{s}\sqrt{(ct)^2 - s^2}\right)$$

Para $|z| > \sqrt{(ct)^2 - s^2}$:

$$ct_r = ct - \mathscr{r} = ct - \sqrt{s^2 + z^2} < 0 \Rightarrow I(t_r) = 0$$

Então, podemos escrever

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\sqrt{(ct)^2 - s^2}}^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}} \qquad (u = z/s)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^{\frac{1}{s}\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \qquad (u = \operatorname{tg}\theta)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^{\beta} \sec\theta \, d\theta \qquad \beta = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{s}\sqrt{(ct)^2 - s^2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \ln\left(|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right)\Big|_0^{\beta}$$

Para $|z| > \sqrt{(ct)^2 - s^2}$: (6)

$$ct_r = ct - r = ct - \sqrt{s^2 + z^2} < 0 \Rightarrow I(t_r) = 0$$

Então, podemos escrever

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\sqrt{(ct)^2 - s^2}}^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}} \qquad (u = z/s)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^{\frac{1}{s}\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \qquad (u = \operatorname{tg}\theta)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \int_0^{\beta} \sec\theta \, d\theta \qquad \beta = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{s}\sqrt{(ct)^2 - s^2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \ln(|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|)\Big|_0^{\beta}$$

Ou seja

$$\vec{A}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln\left(\dfrac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s}\right)\hat{z}, & t > s/c \\ \vec{0}, & t < s/c \end{cases}$$

$V = 0$

Campo elétrico

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z} \quad p/ \ t > s/c$$

Campo elétrico

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z} \quad p/ \ t > s/c$$

$$\lim_{t\to\infty} \vec{E}(s,t) = \vec{0}$$

Campo elétrico

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z} \quad p/ \ t > s/c$$

$$\lim_{t \to \infty} \vec{E}(s,t) = \vec{0} \quad (\text{caso estático})$$

Campo elétrico

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z} \quad p/ \ t > s/c$$

$$\lim_{t \to \infty} \vec{E}(s,t) = \vec{0} \quad (\text{caso estático})$$

Campo magnético

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\phi} \quad p/ \ t > s/c$$

Campo elétrico

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z} \quad p/ \ t > s/c$$

$$\lim_{t \to \infty} \vec{E}(s,t) = \vec{0} \quad (\text{caso estático})$$

Campo magnético

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\phi} \quad p/ \ t > s/c$$

$$\lim_{t \to \infty} \vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \hat{\phi} \quad (\text{caso estático})$$

Campo elétrico

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z} \quad p/\ t > s/c$$

$$\lim_{t \to \infty} \vec{E}(s,t) = \vec{0} \quad (\text{caso estático})$$

Campo magnético

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\phi} \quad p/\ t > s/c$$

$$\lim_{t \to \infty} \vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \hat{\phi} \quad (\text{caso estático})$$

—————— // ——————

Exercício

Determine $\vec{E}$ e $\vec{B}$ p/ um fio infinito neutro percorrido por corrente

$$I(t) = \begin{cases} Kt, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Campo elétrico

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z} \quad p/ \ t > s/c$$

$$\lim_{t \to \infty} \vec{E}(s,t) = \vec{0} \quad (\text{caso estático})$$

Campo magnético

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\phi} \quad p/ \ t > s/c$$

$$\lim_{t \to \infty} \vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \hat{\phi} \quad (\text{caso estático})$$

—————— // ——————

Exercício

Determine $\vec{E}$ e $\vec{B}$ p/ um fio infinito neutro percorrido por corrente

$$I(t) = \begin{cases} Kt, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Novamente $\rho = 0 \Rightarrow V = 0$

Campo elétrico (7)

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z} \quad p/ \ t > s/c$$

$$\lim_{t\to\infty} \vec{E}(s,t) = \vec{0} \quad (\text{caso estático})$$

Campo magnético

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\phi} \quad p/ \ t > s/c$$

$$\lim_{t\to\infty} \vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s}\hat{\phi} \quad (\text{caso estático})$$

——— // ———

Exercício

Determine $\vec{E}$ e $\vec{B}$ p/ um fio infinito neutro percorrido por corrente

$$I(t) = \begin{cases} Kt, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}$$

Novamente $\rho = 0 \Rightarrow V = 0$

e

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \hat{z}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(t - r/c)}{r} dz \quad \text{com } r = s^2 + z^2$$

Para $t > s/c$

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{z}\int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{s^2+z^2}\right)}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz$$

Para $t > s/c$

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{z}\int_0^{\sqrt{(ct)^2-s^2}} \frac{\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{s^2+z^2}\right)}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz$$

$$= \frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{z}\left\{ t\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz - \frac{1}{c}\int_0^{\alpha} dz \right\}$$

com $\alpha = \sqrt{(ct)^2-s^2}$

Para $t > s/c$

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\,\hat{z} \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{s^2 + z^2}\right)}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz$$

$$= \frac{\mu_0 K}{2\pi}\,\hat{z} \left\{ t \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz - \frac{1}{c}\int_0^{\alpha} dz \right\}$$

com $\alpha = \sqrt{(ct)^2 - s^2}$

Então

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\,\hat{z} \left\{ t \ln\left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2 - s^2} \right\}$$

Para $t > s/c$

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\,\hat{z}\int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{s^2+z^2}\right)}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz$$

$$= \frac{\mu_0 K}{2\pi}\,\hat{z}\left\{ t\int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{s^2+z^2}}\,dz - \frac{1}{c}\int_0^{\alpha} dz \right\}$$

com $\alpha = \sqrt{(ct)^2 - s^2}$

Então

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\,\hat{z}\left\{ t\ln\left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2 - s^2} \right\}$$

Campo elétrico

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\,\hat{z}\left\{ \ln\left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s}\right) \right.$$

$$\left. + t\,\frac{c}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} - \frac{1}{c}\,\frac{c^2 t}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \right\}$$

Para $t > s/c$

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{z}\int_0^{\sqrt{(ct)^2-s^2}} \frac{\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{s^2+z^2}\right)}{\sqrt{s^2+z^2}}dz$$

$$= \frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{z}\left\{ t\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{s^2+z^2}}dz - \frac{1}{c}\int_0^{\alpha}dz \right\}$$

com $\alpha = \sqrt{(ct)^2-s^2}$

Então

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{z}\left\{ t \ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2-s^2}\right\}$$

Campo elétrico

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{z}\left\{ \ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right)\right.$$

$$\left. + t\frac{c}{\sqrt{(ct)^2-s^2}} - \frac{1}{c}\frac{c^2 t}{\sqrt{(ct)^2-s^2}}\right\}$$

Então

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right)\hat{z} \quad p/\ t > s/c$$

Campo magnético

$$\vec{B}(s,t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{\phi}$$

Campo magnético

$$\vec{B}(s,t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{\phi}$$

$$= -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{\phi}\left\{-t\,\frac{1}{s}\,\frac{ct}{\sqrt{(ct)^2-s^2}} + \frac{1}{c}\,\frac{s}{\sqrt{(ct)^2-s^2}}\right\}$$

Campo magnético

$$\vec{B}(s,t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{\phi}$$

$$= -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{\phi}\left\{-t\,\frac{1}{s}\,\frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} + \frac{1}{c}\,\frac{s}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}}\right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{\phi}\left\{\frac{-(ct)^2 + s^2}{sc\sqrt{(ct)^2 - s^2}}\right\}$$

Campo magnético

$$\vec{B}(s,t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{\phi}$$

$$= -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{\phi}\left\{-t\,\frac{1}{s}\,\frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} + \frac{1}{c}\,\frac{s}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}}\right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{\phi}\left\{\frac{-(ct)^2 + s^2}{sc\sqrt{(ct)^2 - s^2}}\right\}$$

Então

$$\vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\,\frac{\sqrt{(ct)^2 - s^2}}{sc}\hat{\phi} \quad p/ \quad t > s/c$$

Campo magnético

$$\vec{B}(s,t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{\phi}$$

$$= -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{\phi}\left\{-t\,\frac{1}{s}\frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} + \frac{1}{c}\frac{s}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}}\right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{\phi}\left\{\frac{-(ct)^2 + s^2}{sc\sqrt{(ct)^2 - s^2}}\right\}$$

Então

$$\vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\frac{\sqrt{(ct)^2 - s^2}}{sc}\hat{\phi} \quad p/ \quad t > s/c$$

——— // ———

Equações de Jefimenko

Campo magnético

$$\vec{B}(s,t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{\phi}$$

$$= -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{\phi}\left\{-t\,\frac{1}{s}\,\frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} + \frac{1}{c}\,\frac{s}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}}\right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 K}{2\pi}\hat{\phi}\left\{\frac{-(ct)^2 + s^2}{sc\sqrt{(ct)^2 - s^2}}\right\}$$

Então

$$\vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\,\frac{\sqrt{(ct)^2 - s^2}}{sc}\,\hat{\phi} \quad p/ \quad t > s/c$$

—— // ——

Equações de Jefimenko

É possível generalizar as leis de Coulomb e de Biot-Savart para situações em que as densidades de carga e corrente são dependentes do tempo.

Potenciais retardados

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'$$

Potenciais retardados

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'$$

Campo eletromagnético

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Potenciais retardados

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\imath}\,d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{\imath}\,d\tau'$$

Campo eletromagnético

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad e \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Na aula passada calculamos $\vec{\nabla}V$ e mostramos que

$$\vec{\nabla}V = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{\imath}}{\imath} + \rho\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right]d\tau'$$

Potenciais retardados

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

Campo eletromagnético

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad e \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Na aula passada calculamos $\vec{\nabla}V$ e mostramos que

$$\vec{\nabla}V = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} + \rho\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right]d\tau'$$

Derivando $\vec{A}$ com respeito ao tempo

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\dot{\vec{J}}}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

Potenciais retardados

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

Campo eletromagnético

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad e \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Na aula passada calculamos $\vec{\nabla}V$ e mostramos que

$$\vec{\nabla}V = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} + \rho\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right]d\tau'$$

Derivando $\vec{A}$ com respeito ao tempo

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\dot{\vec{J}}}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

e portanto, a eq. de Jefimenko p/ o campo $\vec{E}$ é

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left\{\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}\,',t_r)}{c\mathscr{r}}\hat{\mathscr{r}} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t_r)}{c^2\mathscr{r}}\right\}d\tau}$$

generalização da lei de Coulomb

Potenciais retardados

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

Campo eletromagnético

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Na aula passada calculamos $\vec{\nabla}V$ e mostramos que

$$\vec{\nabla}V = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} + \rho\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right]d\tau'$$

Derivando $\vec{A}$ com respeito ao tempo

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\dot{\vec{J}}}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

e portanto, a eq. de Jefimenko p/ o campo $\vec{E}$ é

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left\{\frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}',t_r)}{c\mathscr{r}}\hat{\mathscr{r}} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}',t_r)}{c^2\mathscr{r}}\right\}d\tau'}$$

generalização da lei de Coulomb

Perceba que no limite estático ($\dot{\rho}=0$, $\dot{\vec{J}}=\vec{0}$) recuperamos a lei de Coulomb

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{r} \vec{\nabla} \times \vec{J} - \vec{J} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\tau'$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{r} \vec{\nabla} \times \vec{J} - \vec{J} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\tau'$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{J} \right)_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{r} \vec{\nabla} \times \vec{J} - \vec{J} \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} d\tau'$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{J}\right)_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}$$

$$t_r = t - r/c$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{r} \vec{\nabla} \times \vec{J} - \vec{J} \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} d\tau'$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{J}\right)_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \qquad t_r = t - r/c$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t}\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial y}\right) =$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{r} \vec{\nabla} \times \vec{J} - \vec{J} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\tau'$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{J} \right)_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \qquad t_r = t - r/c$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial y} \right) = -\frac{1}{c} \dot{J}_z \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{r} \vec{\nabla} \times \vec{J} - \vec{J} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\tau'$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{J})_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \qquad t_r = t - r/c$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial y} \right) = -\frac{1}{c} \dot{J}_z \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial J_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \dot{J}_y \frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{r} \vec{\nabla} \times \vec{J} - \vec{J} \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} d\tau'$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{J})_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \qquad t_r = t - r/c$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial y}\right) = -\frac{1}{c} \dot{J}_z \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial J_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \dot{J}_y \frac{\partial r}{\partial z}$$

Então

$$(\vec{\nabla} \times \vec{J})_x = -\frac{1}{c}\left(-\dot{J}_z \frac{\partial r}{\partial y} + \dot{J}_y \frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{r}\,\vec{\nabla}\times\vec{J} - \vec{J}\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau'$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{J})_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \qquad t_r = t - r/c$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial y}\right) = -\frac{1}{c}\,\dot{J}_z\,\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial J_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\,\dot{J}_y\,\frac{\partial r}{\partial z}$$

Então

$$(\vec{\nabla}\times\vec{J})_x = -\frac{1}{c}\left(-\dot{J}_z\,\frac{\partial r}{\partial y} + \dot{J}_y\,\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{c}\left(\dot{\vec{J}}\times\vec{\nabla}r\right)_x$$

De maneira similar

$$(\vec{\nabla}\times\vec{J})_y = \frac{1}{c}\left(\dot{\vec{J}}\times\vec{\nabla}r\right)_y \quad \text{e} \quad (\vec{\nabla}\times\vec{J})_z = \frac{1}{c}\left(\dot{\vec{J}}\times\vec{\nabla}r\right)_z$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{r}\vec{\nabla}\times\vec{J} - \vec{J}\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau'$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{J})_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \qquad t_r = t - r/c$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial y}\right) = -\frac{1}{c}\dot{J}_z\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial J_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\dot{J}_y\frac{\partial r}{\partial z}$$

Então

$$(\vec{\nabla}\times\vec{J})_x = -\frac{1}{c}\left(-\dot{J}_z\frac{\partial r}{\partial y} + \dot{J}_y\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{c}(\dot{\vec{J}}\times\vec{\nabla}r)_x$$

De maneira similar

$$(\vec{\nabla}\times\vec{J})_y = \frac{1}{c}(\dot{\vec{J}}\times\vec{\nabla}r)_y \quad e \quad (\vec{\nabla}\times\vec{J})_z = \frac{1}{c}(\dot{\vec{J}}\times\vec{\nabla}r)_z$$

Portanto, como $\vec{\nabla}r = \hat{r}$, temos

$$\vec{\nabla}\times\vec{J} = \frac{1}{c}\dot{\vec{J}}\times\hat{r}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\frac{1}{r}\,\vec{\nabla}\times\vec{J} - \vec{J}\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau'$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{J})_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \qquad t_r = t - r/c$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial y}\right) = -\frac{1}{c}\dot{J}_z\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial J_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\dot{J}_y\frac{\partial r}{\partial z}$$

Então

$$(\vec{\nabla}\times\vec{J})_x = -\frac{1}{c}\left(-\dot{J}_z\frac{\partial r}{\partial y} + \dot{J}_y\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{c}(\dot{\vec{J}}\times\vec{\nabla}r)_x$$

De maneira similar

$$(\vec{\nabla}\times\vec{J})_y = \frac{1}{c}(\dot{\vec{J}}\times\vec{\nabla}r)_y \quad e \quad (\vec{\nabla}\times\vec{J})_z = \frac{1}{c}(\dot{\vec{J}}\times\vec{\nabla}r)_z$$

Portanto, como $\vec{\nabla}r = \hat{r}$, temos

$$\vec{\nabla}\times\vec{J} = \frac{1}{c}\dot{\vec{J}}\times\hat{r}$$

além disso, $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$, de forma que

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{r^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t)}{cr}\right\}\times\hat{r}\,d\tau'}$$

generalização da lei de Biot-Savart