

AULA 9

Momento Angular na M.Q. ($\hbar=1$)

Definição: Momento Angular $\vec{J}$ é o conj de três operadores tal que $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$ (1) $i, j, k = 1, 2, 3$

O que segue é geral, porém partículas de massa nula (o fóton!) precisam de um tratamento especial.

J^2 é um escalar por rotação i.e. $[J^2, J_i] = 0$
 $\Rightarrow J^2$ e J_z (escolta) podem ser diagonalizados simultaneamente:
 $\{|j, m\rangle\} \rightarrow$ base

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad (2a)$$

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad (2b)$$

m é real pois $J_z^\dagger = J_z$; $j(j+1)$ é real e positivo (mostre!) ou nulo

$$\langle j, m | j', m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (2c)$$

É útil definir

$$J_\pm = J_1 \pm i J_2 \quad (3a)$$

$$J_+ = J_-^\dagger \quad (3b)$$

não são hermitianos!

$$[J_+, J_-] = 2J_z \quad (4a)$$

$$[J_+, J_z] = -J_+ \quad (4b)$$

$$[J_-, J_z] = J_- \quad (4c)$$

$$J_+ J_- = (J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) \\ = J_1^2 + J_2^2 + i(J_2 J_1 - J_1 J_2) = J^2 - J_3^2 + J_3$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_3(J_3 - 1) \quad (4d)$$

$$J_- J_+ = J^2 - J_3(J_3 + 1) \quad (4e)$$

$$[J_{\pm}, J^2] = 0 \quad (4f)$$

Assim

$$\langle j, m | J_1^2 + J_2^2 | j, m \rangle = \langle j, m | J^2 - J_3^2 | j, m \rangle = j(j+1) - m^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m^2 \leq j(j+1)}$$

m é limitado entre $m_{\max}$ e $m_{\min}$ para um dado j , assim

$$m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$$

$$J_3 J_{\pm} | j, m \rangle = (J_{\pm} J_3 \pm J_{\pm}) | j, m \rangle = (m \pm 1) \underline{J_{\pm} | j, m \rangle}$$

autovetor de J_3 com auto-valor $m \pm 1$

$$J^2 \underline{J_{\pm} | j, m \rangle} = J_{\pm} J^2 | j, m \rangle = j(j+1) \underline{J_{\pm} | j, m \rangle}$$

autovetor de J^2 com auto-valor $j(j+1)$

$$\therefore J_{\pm} | j, m \rangle = a_{\pm}(j, m) | j, m \pm 1 \rangle$$

$$|a_{\pm}|^2 = \langle j, m | J_{\mp} J_{\pm} | j, m \rangle = \langle j, m | J^2 - J_3(J_3 \pm 1) | j, m \rangle \\ = j(j+1) - m(m \pm 1) \geq 0$$

por convenção de fase definimos

(2)

$$a_{\pm} |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} |jm\rangle$$

$$\boxed{J_{\pm} |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} |jm\rangle} \quad (5)$$

$$J_+ |j m_{\max}\rangle = 0$$

$$\therefore j(j+1) = m_{\max}(m_{\max}+1)$$

$$J_- |j m_{\min}\rangle = 0$$

$$= m_{\min}(m_{\min}-1)$$

$$\Rightarrow m_{\max}(m_{\max}+1) - m_{\min}(m_{\min}-1) = (m_{\max} + m_{\min})(m_{\max} - m_{\min} + 1)$$

$$= 0, \text{ mas } (m_{\max} - m_{\min} + 1) > 0 \Rightarrow \boxed{m_{\max} = -m_{\min}} = j$$

logo

$$\underline{-j \leq m \leq j} \quad (6)$$

$$(J_+)^k |j m_0\rangle \propto |j m_0 + k\rangle \quad k \text{ é inteiro}$$

$$\text{para algum } k \quad m_0 + k = m_{\max} = j$$

$$(J_-)^l |j m_0\rangle \propto |j m_0 - l\rangle \quad l \text{ é inteiro}$$

$$\text{para algum } l \quad m_0 - l = -j = m_{\min}$$

$$\therefore k + l = 2j \text{ é inteiro}$$

$\Rightarrow$ os auto-valores de J^2 são $j(j+1)$, com $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$
(inteiros e semi-inteiros)

dado j existem $2j+1$ auto-estados de J_3 com auto-valores $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$

O espaço vetorial complexo de dimensão $2j+1$ gerado pelos estados de um dado j será chamado de $\mathcal{H}_j$.

O espectro de J_3 implica que os operadores de momento angular tem 2 propriedades importantes independentes de base:

$$(1) \sum_m \langle jm | J_3 | jm \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Tr } J_3 = 0} \text{ em } \{|jm\rangle\}$$

mas
traço é invariante por transf. de base

$$D^j(R) = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{J}} \quad \text{transf. unitárias em } \mathcal{H}_j$$

como fa' vuco são rotações, J_i são matrizes de dim $2j+1$
por uma rotação apropriada $D^\dagger J_3 D$ podemos
virar J_3 para qualquer direção deixando o traço invariante

$$\therefore \boxed{\text{Tr } \vec{J} = 0} \quad (7)$$

(2) Se $M = M^\dagger$ de dim $n \times n$ com auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, então

$$\prod_i (M - \lambda_i) = 0 \quad \text{essa equação também invariante por transf de base} \quad (4)$$

$$M \rightarrow U^\dagger M U, \quad M = J_3 \Rightarrow U^\dagger J_3 U = J_3$$

$$\therefore \left[\prod_{m=-j}^j (J_3 - m) = 0 \right] \quad (8) \quad \text{para todas as componentes de } \vec{J}$$

$$\left[\text{Esse é o teorema de Cayley-Hamilton} \quad \prod_i (M - \lambda_i) = 0 \right]$$

Em $\mathcal{H}_j$ qualquer função dos operadores de momento angular, como $J^j(R)$, é um polinômio de grau no máximo $2j$!

Note que

$$e^{-i\theta J_3} |jm\rangle = e^{-im\theta} |jm\rangle$$

$$\theta = 2\pi \quad \text{então se } j \text{ for inteiro} \quad e^{-im(\theta+2\pi)} = e^{-im\theta}$$

$$\Rightarrow \text{o estado não muda}$$

$$\cdot \text{ se } j \text{ for semi-inteiro} \quad e^{-im(\theta+2\pi)} = -e^{-im\theta}$$

$$\Rightarrow \text{o estado ganha uma fase, muda de sinal}$$

$\therefore$ estados de mom. angular inteiro tem valor único sob rotações

estados de mom. angular semi-inteiro tem valor duplo sob rotações.

Mas $\langle \psi | A | \psi \rangle$ tem valor único! Operadores $\bar{A}$ (5)

observáveis e devem ter valor único mesmo que $|\psi\rangle$ não o tenha!

(a) Momento Angular Orbital

i.e. $l = 0, 1, 2, \dots$ $\{ |lm\rangle \} : L^2, L_3$

$$L_3 |lm\rangle = m |lm\rangle \quad (9a) \quad L^2 |lm\rangle = l(l+1) |lm\rangle \quad (9b)$$

$$\langle \theta \phi | L_3 | lm \rangle = m \langle \theta \phi | lm \rangle \quad (9c)$$

$$\langle \theta \phi | L^2 | lm \rangle = l(l+1) \langle \theta \phi | lm \rangle \quad (9d)$$

na base $\{ |r \theta \phi\rangle \}$ usando coord. esféricas

Neste caso $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$:

$$\int d\theta' d\phi' \sqrt{\sin\theta'} \langle \theta \phi | L_3 | \theta' \phi' \rangle \langle \theta' \phi' | lm \rangle = m \langle \theta \phi | lm \rangle$$

harmônicos
esféricos

$$\int d\theta' d\phi' \sqrt{\sin\theta'} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\sin(\theta-\theta') \sin(\phi-\phi')}{\sin\theta} Y_{lm}(\theta', \phi') = m Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$\boxed{\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm}(\theta, \phi) = m Y_{lm}(\theta, \phi)} \quad (10) \quad \text{Equação diferencial}$$

tedioso encontra L_3 na base $\{ |\vec{r}\rangle \} : x p_y - y p_x = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$
e muda para coord esféricas ...

$$\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (11)$$

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{l'm'}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) = \int d\Omega Y_{l'm'}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (12)$$

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad m > 0$$

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l-m}^*(\theta, \phi) \quad m < 0$$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - \cos^2\theta)^{m/2} \frac{d^m}{d\cos\theta^m} P_l(\cos\theta)$$

Polinômios de Legendre Associados

Polinômios de Legendre.

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2 - 1)^l$$

Um teorema importante aqui é o chamado TEOREMA DE ADIÇÃO

$$\vec{n}_1 \equiv (\theta_1, \phi_1) \quad \vec{n}_2 \equiv (\theta_2, \phi_2)$$

$$P_l(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \phi_2) \quad (13)$$

Relação de Completude:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') = \frac{\delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi')}{\sin\theta} \quad (14)$$

EXEMPLOS: $\boxed{l=0}$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$\boxed{l=1} \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\phi} \sin \theta$$

$$x_1 = r \cos \phi \sin \theta \quad y_1 = r \sin \phi \sin \theta \quad z_1 = r \cos \theta$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r} z_1 \quad Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \phi \pm i \sin \phi) \sin \theta \right]$$

$$= \mp \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 \pm i \frac{y_1}{\sqrt{2}} \right]$$

Podemos então escrever:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{\frac{4\pi}{3}} r}_C \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = C M \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix} \quad M \cdot M^\dagger = \mathbb{I} \quad (\text{matriz unitária})$$

$$\text{logo} \quad \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix} = C^{-1} M^\dagger \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

podemos agora mudar para um outro sistema por rotações

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (\theta, \phi) \longrightarrow (\theta', \phi')$$

$$M \begin{pmatrix} Y_{11}(\theta', \phi') \\ Y_{10}(\theta', \phi') \\ Y_{1-1}(\theta', \phi') \end{pmatrix} = R(\alpha) M \begin{pmatrix} Y_{11}(\theta, \phi) \\ Y_{10}(\theta, \phi) \\ Y_{1-1}(\theta, \phi) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} Y_{11}(\vec{n}') \\ Y_{10}(\vec{n}') \\ Y_{1-1}(\vec{n}') \end{pmatrix} = M^\dagger R(\alpha) M \begin{pmatrix} Y_{11}(\vec{n}) \\ Y_{10}(\vec{n}) \\ Y_{1-1}(\vec{n}) \end{pmatrix}$$

e isso também vale p/ os kets $|1m\rangle$
 $\vec{n}' \equiv (\theta', \phi')$ $\vec{n} \equiv (\theta, \phi)$

(b) Spin

O spin é o momento angular total do sistema (elementar ou composto) em torno do CM. Note que o conceito de CM não tem sentido para o fóton; o caso de partículas de massa nula deve ser tratado separadamente.

$$\boxed{j = 1/2} \quad \mathcal{H}_{1/2} \quad \dim = 2j + 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$$

• $\text{Tr } J_i = 0$ $J_i^\dagger = J_i$ matrizes 2×2 , hermitianas de traço nulo

$$\Rightarrow J_i \propto \sigma_i \Rightarrow J_i = a_i \sigma_i, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Cayley-Hamilton

• $(J_i + 1/2)(J_i - 1/2) = 0 \Rightarrow J_i^2 = \frac{1}{4} = a_i^2 \quad \therefore \boxed{J_i = \frac{1}{2} \sigma_i} \quad (8 \text{ bits})$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$j = 1/2 \quad m = \pm 1/2$$

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{base } \{|j, m\rangle\}$$

$$\boxed{[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k} \quad \sigma_i^2 = 1, \quad \text{Tr } \sigma_i = 0$$

$$\boxed{\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}} \quad (16)$$

Qualquer observável de $\mathcal{H}_{1/2}$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\mathbb{I}$ e σ_i (4 matrizes L.I.)

$$M_{2 \times 2} = m_0 \mathbb{I} + m_i \sigma_i = \begin{pmatrix} m_0 + m_3 & m_1 - im_2 \\ m_1 + im_2 & m_0 - m_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (18)$$

Prova:

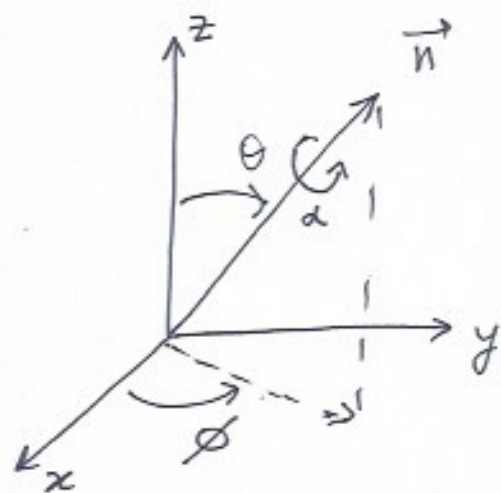
$$\begin{aligned} \sigma_i A_i \sigma_j B_j &= A_i B_j (i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}) \\ &= i \epsilon_{ijk} A_i B_j \sigma_k + \delta_{ij} A_i B_j \\ &= A_i B_i + i \sigma_k (\vec{A} \times \vec{B})_k \end{aligned}$$

O operador unitário para rotações finitas pode então ser avaliado explicitamente

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{1/2}(R) &= e^{-\frac{i}{2} \alpha \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} \\ &= \cos \frac{\alpha}{2} - i (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \frac{\alpha}{2} \quad (19) \end{aligned}$$

É útil definir os chamados parâmetros de Cayley-Klein:

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$



$$\mathcal{D}^{1/2}(R) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{unitariedade}$$

obs: a matriz unitária 2×2 tem a forma $e^{i\beta} \mathcal{D}^{1/2}(R)$, mas a fase global não aparece nos observáveis!

Usando (19) e (20) vemos que

$$a = \cos \frac{\alpha}{2} - i \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} b &= -[\sin \theta \sin \phi + i \sin \theta \cos \phi] \sin \frac{\alpha}{2} \\ &= -i e^{-i\phi} \sin \theta \sin \frac{\alpha}{2} \quad (21b) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}^{1/2+}(R) = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}$$

$$D^{1/2+}(R) |+\rangle = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}$$

$$= a^* |+\rangle + b^* |-\rangle$$

Esse estado rodado é um auto-estado do momento angular? Ele tem certamente $j = 1/2$, como todos os estados de $J_{B1/2}$ (uma rotação não pode mudar os auto-valores de J^2). Mas é também um auto-estado de uma componente particular de $\vec{J}$ com auto-valor $+1$. Vejamos

$$\sigma_3 |+\rangle = |+\rangle \quad \Rightarrow \quad D^{1/2+} \sigma_3 |+\rangle = D^{1/2+} |+\rangle$$

~~$$D^{1/2+} \sigma_3 D^{1/2+} |+\rangle = D^{1/2+} |+\rangle$$~~

$$\underbrace{D^{1/2+} \sigma_3 D^{1/2+}}_{\tilde{\sigma}_3} (D^{1/2+} |+\rangle) = (D^{1/2+} |+\rangle)$$

$\Rightarrow D^{1/2+} |+\rangle$ é autovetor de $\tilde{\sigma}_3$ com auto-valor $+1$.

Seja R uma rotação em torno de $\vec{n} = (0, 1, 0)$

neste caso

$$\tilde{\sigma}_3 = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sigma_2 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \sigma_3 \left(\cos \frac{\alpha}{2} - i \sigma_2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sigma_2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \sigma_3$$

$$= \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 i \sigma_2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \sigma_3$$

(11)

$$\tilde{\sigma}_3 = \cos \alpha \sigma_3 - \sigma_1 \sin \alpha$$

Note que $\alpha/2$ aparece nas rotações dos estados, enquanto que α aparece nas rotações dos operadores vetoriais (observáveis não tem valor duplo!)

No formalismo de operador estatístico (ou matriz densidade) o estado mais geral de $\mathcal{H}_{1/2}$ é descrito por

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) \quad \vec{P} \text{ é a polarização}$$

$$\rho^\dagger = \rho \Rightarrow \vec{P} \text{ é um vetor real}$$

$$\text{Tr } \rho = 1 \quad \checkmark \quad (\text{por construção})$$

$$\text{Tr } \rho^2 = \frac{1}{2} (1 + P^2) \leq 1 \quad \Rightarrow |\vec{P}| \leq 1$$

$$|\vec{P}| = 1 \text{ é um estado puro}$$

$$\langle \vec{\sigma} \rangle = \text{Tr} (\vec{\sigma} \rho) = \vec{P}$$

A polarização também determina o valor esperado de qualquer operador vetorial em $\mathcal{H}_{1/2}$, pois tal operador deve ter a forma

$$\vec{V} = \lambda \vec{\sigma}$$

$$\therefore \langle \vec{V} \rangle = \lambda \vec{P}$$

Na representação que diagonaliza

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \sigma_n$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+P) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-P) \end{pmatrix}$$

se $P=1$ essa é uma matriz densidade de um estado puro com auto-valor $+1$ de σ_n
se $P=0$ o estado encontra-se em uma mistura 50% $(+1)$ e 50% (-1)

Note: que como todos os observáveis em $\mathcal{H}_{1/2}$ podem ser escritos como combinações lineares de $\mathbb{I}$ e $\vec{\sigma}$, em qualquer estado de um sistema de spin $1/2$ os únicos observáveis possíveis são escalares ou vetoriais (sob rotação)

Ex: se um sistema com $g=1/2$ carrega cargas e correntes, suas propriedades e.m. são descritas totalmente pela carga total (escalar) e o momento de dipolo (vetor). Multipolos superiores se anulam pois em $\mathcal{H}_{1/2}$ é impossível construir tensores de ordem mais alta! Se o momento de dipolo é elétrico ou magnético dependerá do que acontece com o sistema sob reflexão espacial e/ou reversão temporal. Veremos isso mais adiante.

$$\boxed{j=1} \quad 2j+1 = 3 \text{ dim} \quad \mathcal{H}_1$$

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k \quad \text{matrizes } 3 \times 3$$

$$J_i^\dagger = J_i$$

$$\text{Tr } J_i = 0$$

$$(J_i - 1) J_i (J_i + 1) = 0 \Rightarrow J_i^3 = J_i \quad (\text{Cayley-Hamilton})$$

$$\boxed{D^j(R) = e^{-i \theta \vec{n} \cdot \vec{J}} = 1 - i (\vec{J} \cdot \vec{n}) \sin \theta - (\vec{J} \cdot \vec{n})^2 (1 - \cos \theta)}$$

(lista)

obs: Podemos ir de um ket de $\mathcal{H}_j$ $|j m\rangle \xrightarrow{D^j(R)} |j m'\rangle$ a todos os outros por rotações. Para spin j o operador de rotações $D^j(R)$ é um polinômio em $(\vec{J} \cdot \vec{n})$ de grau $2j$, o que fornece operadores $J_\pm$ suficientes para levar a qualquer outro estado partindo de $|j m\rangle$

Em $\mathcal{H}_1$ qualquer operador é uma matriz 3×3 que pode ser expressa como combinação linear de 9 matrizes linearmente independentes: $\mathbb{1}$, J_i , 5 tensores de ordem 2 sob rotações: $J_i J_j$ (9 bilineares) - mas eles não são completamente ind. de $\mathbb{1}$ e J_i pois

$$J_i J_j - J_j J_i = i \varepsilon_{ijk} J_k \quad (\text{combinação anti-simétrica})$$

$$J^2 = j(j+1) = 2 \quad (\text{combinação simétrica})$$

Assim ficamos com a combinação simétrica que não contém J^2

$$\boxed{T_{ij} = \frac{1}{2} (J_i J_j + J_j J_i) - \frac{2}{3} \delta_{ij}}$$

tensor simétrico de traço nulo.

$$\{ \mathbb{1}, J_i, T_{ij} \}$$

$$J_i \longrightarrow D'(R)^+ J_i D'(R) = \sum_k a_{ik}(R) J_k$$

transforma-se como um vetor sob rotações em $\mathcal{E}_3$.

Os termos bilineares T_{ij} não transformam assim sob rotações mas

$$J_i J_j \longrightarrow (D'^+(R) J_i D'(R)) (D'^+(R) J_j D'(R))$$

$$= \sum_{k,l} a_{ik}(R) a_{jl}(R) J_k J_l$$

que é a lei de transformação de um tensor de ordem 2 em $\mathcal{E}_3$

Qualquer observável no espaço de spin 1, $\mathcal{H}_1$, pode ser escrito como uma combinação linear de $\{ \mathbb{1}, J_i, T_{ij} \}$

Em particular a matriz densidade tem a forma.

$$\rho = \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \vec{P} \cdot \vec{J} + W_{ij} T_{ij})$$

W_{ij} é um conj. de 5 números reais

Mesmo se o estado não tiver polarização ($\vec{P} = 0$) pode não ser esfericamente simétrico se $W_{ij} \neq 0$.

Nesse caso nenhum operador vetorial (ex: momento de dipolo) teria um valor esperado não-nulo nesse estado, mas um quadrupolo teria valor esperado não-nulo para qualquer estado de spin!

[j arbitrário] Podemos generalizar as lições que aprendemos com $j = 1/2$ e $j = 1$

— um conj completo de matrizes no espaço $\mathcal{H}_j$ de dim $2j+1$ deve ter $(2j+1)^2$ membros L.I.:

$$\{ \mathbb{1}, J_i, T_{ij}, \text{etc} \dots \}$$

— qualquer operador vetorial pode ser escrito como

$$V_i = \lambda_V J_i$$

onde λ_V é invariante (escalar) por rotações

$$\Rightarrow \langle j m | V_i | j m' \rangle = \lambda_V \langle j m | J_i | j m' \rangle$$

— qualquer operador tensor de ordem 2 simétrico de traço nulo em $\mathcal{H}_j$ tem elementos de matriz

$$\langle j m | X_{ij} | j m' \rangle = \lambda_X \langle j m | \frac{1}{2} (J_i J_j + J_j J_i) | j m' \rangle$$

$$= \frac{\lambda_X}{2} j(j+1) \delta_{ij} \delta_{m m'}$$

λ_x é uma constante que depende apenas das especificidades de X_{ij}
i.e. 5 matrizes de dim $2j+1$ que são completamente especificadas a menos de uma constante.

OBS: as matrizes de rotação $D^j(R)$ de $\mathcal{H}_j$ não constituem a transf. unitária mais geral no espaço $(2j+1)$ -dimensional. P/ todo j elas dependem de 3 parâmetros reais p/ especificar uma rotação em $\mathbb{C}_3$, enquanto que a transf. unitária em $\mathcal{H}_j$ é especificada por $(2j+1)^2$ parâmetros reais. Apenas p/ $j=1/2$ as rotações são suficientes p/ exaurir as transf. unitárias de $\mathcal{H}_{1/2}$.