

Comentários:

1. A técnica experimental anterior, que é amplamente usada para medir a condutividade térmica de dispositivos em microescala e materiais nanoestruturados, é chamada de *método 3 ω* [7].
2. Como esta técnica está baseada na medida de uma temperatura que flutua ao redor de um valor médio que é aproximadamente o mesmo da temperatura da vizinhança, o valor medido de k é relativamente não influenciado por perdas por transferência de calor radiante na parte superior da lâmina metálica. Da mesma forma, a técnica não é influenciada por resistências térmicas de contato que podem existir na inter-

face entre a lâmina sensora e o material sob ela, pois esses efeitos se anulam quando medidas são feitas em duas frequências de excitação diferentes [7].

3. O calor específico e a densidade não dependem fortemente da nanoestrutura da maioria dos sólidos e as propriedades do material convencional podem ser usadas.
4. A espessura de penetração térmica é menor do que a espessura da amostra. Conseqüentemente, o tratamento da amostra como um sólido semi-infinito é uma abordagem válida. Amostras mais finas poderiam ser utilizadas desde que maiores frequências de aquecimento fossem empregadas.

5.10 Métodos de Diferenças Finitas

Soluções analíticas para problemas transientes estão restritas a geometrias e condições de contorno simples, tais como os casos unidimensionais analisados nas seções anteriores. Para algumas geometrias bi e tridimensionais simples, soluções analíticas ainda são possíveis. Contudo, em muitos casos, a geometria e/ou as condições de contorno descartam totalmente a possibilidade do uso de técnicas analíticas, tornando necessária a utilização de métodos de *diferenças finitas* (ou *elementos finitos*). Tais métodos, apresentados na Seção 4.4 para condições de regime estacionário, são facilmente estendidos para problemas transientes. Nesta seção, analisamos formas *explícitas* e *implícitas* de soluções por diferenças finitas para problemas de condução transiente.

Soluções analíticas para algumas geometrias simples bi e tridimensionais são encontradas na Seção 5S.2.

5.10.1 Discretização da Equação do Calor: O Método Explícito

Novamente considere o sistema bidimensional da Figura 4.4. Sob condições transientes com propriedades constantes e na ausência de geração interna, a forma apropriada da equação do calor, Equação 2.19, é

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5.72)$$

Para obter a forma de diferenças finitas dessa equação, podemos usar as aproximações por *diferença central* para as derivadas espaciais representadas pelas Equações 4.27 e 4.28. Mais uma vez, os índices subscritos m e n podem ser usados para designar as posições dos *pontos nodais discretos* em relação aos eixos x e y . Entretanto, além de ser discretizado no espaço, o problema também deve ser discretizado no tempo. O inteiro p é introduzido com esse propósito, onde

$$t = p \Delta t \quad (5.73)$$

e a aproximação de diferença finita para a derivada em relação ao tempo na Equação 5.72 é representada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (5.74)$$

O índice sobrescrito p é usado para indicar a dependência temporal da temperatura T e a derivada em relação ao tempo é ex-

pressa em termos da diferença entre as temperaturas associadas aos instantes de tempo *novo* ($p + 1$) e *anterior* (p). Assim, os cálculos devem ser efetuados em instantes de tempo sucessivos separados por um intervalo de tempo Δt . Da mesma forma que a solução por diferenças finitas no espaço se limita à determinação da temperatura em pontos discretos, ela também restringe a determinação da temperatura a pontos discretos no tempo.

Se a Equação 5.74 for substituída na Equação 5.72, a natureza da solução por diferenças finitas dependerá do instante de tempo específico no qual as temperaturas estão sendo determinadas nas aproximações por diferenças finitas para as derivadas espaciais. Na solução pelo *método explícito*, essas temperaturas são avaliadas no instante de tempo *anterior* (p). Assim, a Equação 5.74 é considerada uma aproximação por *diferença adiantada* para a derivada em relação ao tempo. Determinando os termos do lado direito das Equações 4.27 e 4.28 em p e substituindo na Equação 5.72, a forma explícita da equação de diferenças finitas para o nó interior m,n é

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p - 2T_{m,n}^p}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p - 2T_{m,n}^p}{(\Delta y)^2} \quad (5.75)$$

Explicitando a temperatura nodal no novo instante de tempo ($p + 1$) e considerando que $\Delta x = \Delta y$, tem-se que

$$T_{m,n}^{p+1} = Fo(T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + (1 - 4Fo)T_{m,n}^p \quad (5.76)$$

onde Fo é uma forma em diferenças finitas do número de Fourier

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (5.77)$$

Essa abordagem pode ser facilmente estendida para sistemas uni ou tridimensionais. Se o sistema for unidimensional em x , a forma explícita da equação de diferenças finitas para um nó interior m se reduz a

$$T_m^{p+1} = Fo(T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) + (1 - 2Fo)T_m^p \quad (5.78)$$

As Equações 5.76 e 5.78 são *explícitas* porque as temperaturas nodais *desconhecidas* para o novo instante de tempo são determinadas exclusivamente por temperaturas nodais *conhecidas* no instante de tempo anterior. Dessa forma, o cálculo das temperaturas

desconhecidas é direto. Uma vez que a temperatura em cada um dos nós interiores é conhecida em $t = 0$ ($p = 0$) em função das condições iniciais estipuladas, os cálculos começam em $t = \Delta t$ ($p = 1$), onde as Equações 5.76 ou 5.78 são utilizadas em cada nó interior para determinar a sua temperatura. Com as temperaturas conhecidas em $t = \Delta t$, a equação de diferenças finitas apropriada é, então, utilizada em cada nó para determinar a sua temperatura em $t = 2\Delta t$ ($p = 2$). Dessa forma, a distribuição de temperaturas transiente é obtida *avançando no tempo* em intervalos de Δt .

A precisão da solução por diferenças finitas pode ser melhorada pela diminuição dos valores de Δx e Δt . Obviamente, o número de pontos nodais interiores a serem considerados aumenta à medida que Δx diminui e o número de intervalos de tempo necessários para desenvolver a solução até um dado instante de tempo final aumenta com a diminuição de Δt . Assim, o tempo de computação aumenta com a diminuição de Δx e Δt . A escolha de Δx é tipicamente baseada no compromisso entre a precisão e as exigências computacionais. Entretanto, uma vez feita essa seleção, o valor de Δt não pode ser escolhido independentemente. Ao contrário, o valor de Δt é determinado por exigências de *estabilidade*.

Uma característica indesejada do método explícito é que ele não é incondicionalmente *estável*. Em um problema transiente, a solução para as temperaturas nodais deve, com o avanço do tempo, se aproximar continuamente de valores finais (do regime estacionário). No entanto, com o método explícito, essa solução pode ser caracterizada por oscilações induzidas numericamente, que são fisicamente impossíveis. As oscilações podem se tornar *instáveis*, fazendo com que a solução divirja das condições reais do regime estacionário. Para evitar esses resultados errados, o valor especificado para Δt deve ser mantido abaixo de um certo limite, que depende de Δx e de outros parâmetros do sistema. Essa dependência é chamada de *critério de estabilidade*, que pode ser obtido matematicamente ou demonstrado a partir de um argumento termodinâmico (ver o Problema 5.92). Para os problemas de interesse neste texto, o *critério é determinado pela exigência de que o coeficiente associado ao nó de interesse no instante anterior seja maior ou igual a zero*. Em geral, isso é feito agrupando-se todos os termos que envolvem $T_{n,p}^p$ para obter a forma do coeficiente. Esse resultado é então usado na obtenção de uma relação limite envolvendo Fo , com o qual o valor máximo permissível para Δt pode ser determinado. Por exemplo, com as Equações 5.76 e 5.78 já escritas na forma desejada, segue-se que o critério de estabilidade para um nó interior unidimensional é dado por $(1 - 2Fo) \geq 0$, ou

$$Fo \leq \frac{1}{2} \tag{5.79}$$

e para um nó bidimensional, ele é $(1 - 4Fo) \geq 0$, ou

$$Fo \leq \frac{1}{4} \tag{5.80}$$

Para valores estabelecidos de Δx e α , esses critérios podem ser usados para determinar limites superiores para o valor de Δt .

As Equações 5.76 e 5.78 podem, também, ser deduzidas pela aplicação do método do balanço de energia da Seção 4.4.3 em um volume de controle ao redor do nó interior. Levando em consideração mudanças na energia térmica acumulada, uma forma geral da equação do balanço de energia pode ser representada por

$$\dot{E}_{em} + \dot{E}_y - \dot{E}_{acu} \tag{5.81}$$

Com o objetivo de adotar uma metodologia consistente, mais uma vez considera-se que todos os fluxos de calor *estejam direcionados para o interior* do nó.

Para ilustrar a utilização da Equação 5.81, considere o nó na superfície do sistema unidimensional mostrado na Figura 5.12. Para determinar com maior precisão as condições térmicas próximas à superfície, foi atribuída a esse nó uma espessura que equivale à metade da espessura dos nós interiores. Considerando transferência de calor por convecção de um fluido adjacente e geração nula, tem-se da Equação 5.81 que

$$hA(T_\infty - T_0^p) + \frac{kA}{\Delta x}(T_1^p - T_0^p) - \rho cA \frac{\Delta x}{2} \frac{T_0^{p+1} - T_0^p}{\Delta t} = 0$$

ou, explicitando a temperatura na superfície em $t + \Delta t$,

$$T_0^{p+1} = \frac{2h\Delta t}{\rho c \Delta x}(T_\infty - T_0^p) + \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(T_1^p - T_0^p) + T_0^p$$

Reconhecendo que $(2h\Delta t/(\rho c \Delta x)) = 2(h\Delta x/k)(\alpha\Delta t/\Delta x^2) = 2BiFo$ e agrupando os termos envolvendo T_0^p , segue-se que

$$T_0^{p+1} = 2Fo(T_1^p + BiT_\infty) + (1 - 2Fo - 2BiFo)T_0^p \tag{5.82}$$

A forma em diferenças finitas do número de Biot é

$$Bi = \frac{h\Delta x}{k} \tag{5.83}$$

Relembrando o procedimento para determinar o critério de estabilidade, exigimos que o coeficiente de T_0^p seja maior ou igual a zero. Desta forma,

$$1 - 2Fo - 2BiFo \geq 0$$

ou

$$Fo(1 + Bi) \leq \frac{1}{2} \tag{5.84}$$

Como a solução completa por diferenças finitas requer o uso da Equação 5.78 para os nós interiores, bem como o da Equação 5.82 para o nó na superfície, a Equação 5.84 deve ser comparada à Equação 5.79 para determinar qual exigência é mais restritiva. Como $Bi \geq 0$, fica evidente que o valor limite para Fo estabelecido pela Equação 5.84 é menor do que o para a Equação 5.79. Portanto, para assegurar estabilidade em todos os nós, a Equação 5.84 deve ser usada para selecionar o valor máximo permissível para Fo , e, conseqüentemente, para Δt , a ser utilizado nos cálculos.

Formas da equação de diferenças finitas explícitas para várias geometrias usuais são apresentadas na Tabela 5.3(a). Cada equação pode ser deduzida pela aplicação do método do balan-

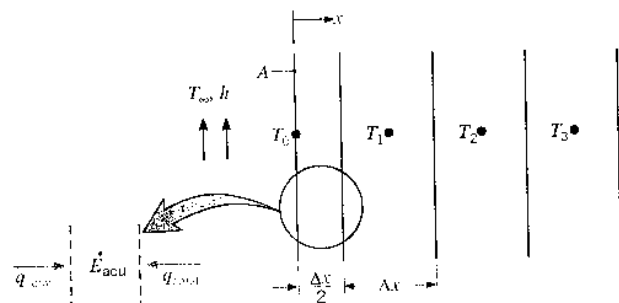


FIGURA 5.12 Nó na superfície com convecção e condução transiente unidimensional.