Exercício 4.29 – PME3330

Equações de Euler e Bernoulli

Exercício 4.29

Exercício 4.29: Considere o escoamento bidimensional, incompressível e permanente de um fluido newtoniano em que $u = -2\,x\,y$, $\upsilon = y^2 - x^2$ e $w = 0$.
a)Esse escoamento satisfaz a conservação da massa?
b)Encontre $p(x,y)$ se $p(0,0)$é igual a p_a. Despreza a gravidade.

a)Para um escoamento bidimensional e incompressível satisfazer a conservação da massa, o divergente do vetor da velocidade deve ser nulo:

$$\nabla \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0$$

Substituindo as expressões para u e υ:

$$-2y + 2y = 0 \Rightarrow \text{OK}$$

Exercício 4.29

b)A solução da distribuição de pressões pode ser encontrada pela equação de Navier-Stokes para escoamento incompressível:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}.\nabla\right)\vec{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\,\nabla^2\vec{V}+\vec{g}$$

Se o escoamento é permanente, bidimensional e com gravidade desprezível, isso resulta:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}\right)$$

Substituindo as expressões das velocidades, isso resulta:

Exercício 4.29

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\left(2xy^2 + 2x^3\right) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\left(2x^2y + 2y^3\right)$$

Note que os termos viscosos sumiram de ambas as equações. Podemos integrar ambas as equações, lembrando que, como são derivadas parciais, não teremos constantes de integração, mas funções:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\left(2xy^2 + 2x^3\right) \Rightarrow p = -\rho\left(x^2y^2 + \frac{1}{2}x^4\right) + f(y)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\left(2x^2y + 2y^3\right) \Rightarrow p = -\rho\left(x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4\right) + f(x)$$

Por comparação, e lembrando que $p(0,0) = p_a$, temos:

$$f(y) = -\rho\frac{1}{2}y^4 \quad f(x) = -\rho\frac{1}{2}x^4 + p_a \Rightarrow \boxed{p = p_a - \rho\left(x^2y^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4\right)}$$

Exercício 4.29

Outro processo de solução pode ser obtido fazendo:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

Podemos fazer isso, pois $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho 4xy$, logo $p = p(x,y)$, ou seja, uma função de ponto.

A integração se faz:

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} dp = \int_{(0,0)}^{(x,0)} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

Escolhemos um caminho de integração entre os pontos (0,0) e (x,y) onde no primeiro trecho y é constante e igual a zero enquanto x varia entre zero e um valor genérico, e no segundo trecho x é constante e y varia entre 0 e um valor genérico.

Exercício 4.29

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} dp = \int_{(0,0)}^{(x,0)} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

Substituindo:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\left(2xy^2 + 2x^3\right) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\left(2x^2 y + 2y^3\right)$$

Resulta:

$$p(x,y) - p(0,0) = -\rho\left[\int_{(0,0)}^{(x,0)} \left(2xy^2 + 2x^3\right) dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} \left(2x^2 y + 2y^3\right) dy\right]$$

Que fica:

$$p(x,y) - p_a = -\rho\left\{\left[x^2 y^2 + \frac{1}{2}x^4\right]_{(0,0)}^{(x,0)} + \left[x^2 y^2 + \frac{1}{2}y^4\right]_{(x,0)}^{(x,y)}\right\} \Rightarrow \boxed{p = p_a - \rho\left(x^2 y^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4\right)}$$

Exercício 4.29

Finalmente, nota-se que, nas equações de Navier-Stokes, o termo viscoso é nulo. Assim, se o escoamento for irrotacional, é possível utilizar a equação de Bernoulli. Fazendo o rotacional da velocidade:

$$\omega_z = \frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2x - (-2x) = 0$$

Logo, o escoamento é irrotacional. A equação de Bernoulli, desprezado o termo de cota por ignorarmos efeitos gravitacionais, fica:

$$\rho \frac{V^2(x,y)}{2} + p(x,y) = \rho \frac{\overbrace{V^2(0,0)}^{0}}{2} + \overbrace{p(0,0)}^{p_a}$$

O módulo da velocidade é:

$$V^2 = u^2 + \upsilon^2 = 4x^2y^2 + (y^4 - 2y^2x^2 + x^4) = y^4 + x^4 + 2x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = p_a - \rho\left(x^2y^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4\right)}$$