Seja $b_k = (-1)^k$. Para todo natural $\underline{n}$,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} b_k \right| \leq 1$$

Como, por hipótese, $a_k$ é decrescente e $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$, segue do critério de Dirichlet a convergência da série dada.

**Exemplo 2:** Prove que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k)}{k}$ é convergente.

Solução: Usando as relações de Euler, podemos mostrar que:

$$\sin(a) + \sin(2a) + \dots + \sin(n.a) = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right) - \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right).a\right]}{2.\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$$

Para $a = 1$, $|\sin(1) + \sin(2) + \dots + \sin(k)| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$, com $b_k = \sin(k)$. Como

$a_k = \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$ e $\left|\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$ satisfazem os critérios de Dirichlet,

então a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k)}{k}$ é convergente.

## Séries de Potências

Seja $a_n$, $n \geq 0$, uma seqüência numérica dada e seja $x_0$ um real dado. A série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (118)$$

denomina-se série de potências, com coeficientes $a_n$, em volta de $x_0$ (ou centrada em $x_0$). Se $x_0 = 0$, temos uma série de potências em volta de zero;

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad (119)$$

Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge em um ponto $x$ se:

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} a_n (x - x_0)^n$$

existe para esse $x$. A série certamente converge em $x = x_0$; pode convergir para todo x, ou pode convergir para alguns valores de x e não convergir para outros. A série dada pela equação (118) converge absolutamente em um ponto x, se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x-x_0|^n \qquad (120)$$

converge. Pode-se mostrar que, se a série convergir absolutamente, então ela convergirá; no entanto, a recíproca não é necessariamente verdadeira.

Um dos testes mais úteis para a convergência absoluta de uma série de potências é o teste da razão. Se $a_n \neq 0$ e se, para um valor fixo de x,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x-x_0| . L \qquad (121)$$

então a série de potências converge absolutamente naquele valor de x se $|x-x_0|.L < 1$ e diverge se $|x-x_0|.L > 1$. Se $|x-x_0|.L = 1$, o teste é inconclusivo

Exemplo: Para quais valores de x a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . n (x-2)^n$$

converge?

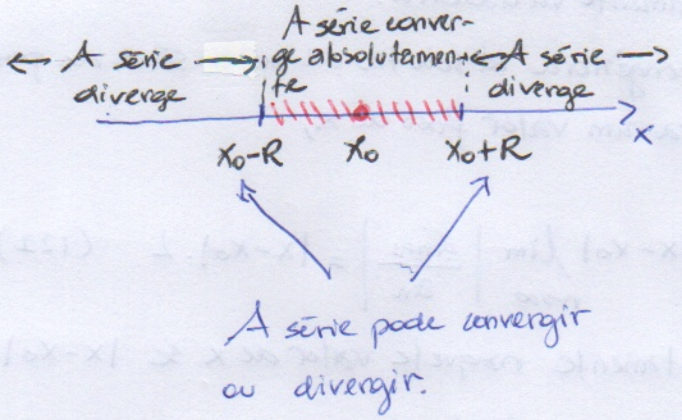
Solução: Vamos utilizar o teste da razão para verificar a convergência da série acima. Assim, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} (n+2)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1} . n . (x-2)^n} \right| = |x-2| . \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x-2|$$

Dessa forma, a série converge absolutamente para $|x-2| < 1$, ou $1 < x < 3$, e diverge para $|x-2| > 1$. Os valores de x para os quais $|x-2| = 1$ são $x = 1$ e $x = 3$. A série, na verdade diverge para cada um desses valores já que o n-ésimo termo da série não tende a zero quando $n \to \infty$.

Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ convergir em $x = x_1$, então ela convergirá absolutamente para $|x-x_0| < |x_1 - x_0|$; e se ela divergir em $x = x_1$, então irá divergir para $|x-x_0| > |x_1 - x_0|$.

**Raio de Convergência**: Seja a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Existe um número positivo $R$, chamado raio de convergência, tal que a série converge absolutamente para $|x-x_0|<R$ e diverge para $|x-x_0|>R$. O intervalo $|x-x_0|<R$ é chamado de intervalo de convergência.




Muitas séries de potências importantes convergem para todos os valores de $x$. Nesse caso, diz-se que $R$ é infinito e que o intervalo de convergência é a reta inteira. Também é possível que uma série de potências convirja apenas em $x_0$. Para tais séries, dizemos que $R=0$ e a série não possui intervalo de convergência. Incluindo esses casos excepcionais, toda série de potências tem um raio de convergência não negativo e, se $R>0$, existe um intervalo de convergência (finito ou infinito) centrado em $x_0$.

**Exemplo**: Determine o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n.2^n}$$

**Solução**: Aplicando o teste da razão, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1).2^{n+1}} \cdot \frac{n.2^n}{(x+1)^n} \right| = \frac{|x+1|}{2} \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{n}{n+1}}^{\to 1} = \frac{|x+1|}{2}$$

Assim, a série será absolutamente convergente para $|x+1|<2$, ou $-3<x<1$, e diverge para $|x+1|>2$. O raio de convergência da série de potências é $R=2$. Finalmente, vamos verificar os extremos do intervalo de convergência. Em $x=1$, a série é a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que sabemos ser uma série que diverge.

Em $x=-3$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n.2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que converge, mas não absolutamente como já vimos. Dizemos, então que a série converge condicionalmente em $x=-3$. Para resumir, a série de potências dada converge para $-3 \leq x < 1$ e diverge, caso contrário. Ela converge absolutamente em $-3<x<1$ e tem raio de convergência 2.

## Propriedades de séries de potências

Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ convergem para $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, para $|x-x_0|<R$, $R>0$. Assim,

① Duas séries podem ser somadas ou subtraídas termo a termo

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n;$$

a série resultante converge pelo menos para $|x-x_0|<R$.

② Duas séries podem ser multiplicadas formalmente,

$$f(x).g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n,$$

tal que $c_n = a_0 b_n + a_1 . b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$. A série resultante converge pelo menos quando $|x-x_0|<R$.
Além disso, se $g(x) \neq 0$, a série para $f(x)$ pode ser formalmente dividida pela série para $g(x)$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n .$$

Na maioria dos casos, os coeficientes $d_n$ podem ser obtidos mais facilmente igualando-se os coeficientes correspondentes na relação equivalente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} d_k . b_{n-k}\right)(x-x_0)^n.$$

No caso da divisão, o raio de convergência da série de potências resultante pode ser menor do que $R$.

③ A função $f$ é contínua e tem derivadas de todas as ordens para $|x-x_0|<R$. Além disso, $f'$, $f''$, ... podem ser calculadas derivando-se a série termo a termo, ou seja,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + n.a_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(x-x_0)^{n-2},$$

e assim por diante, e cada uma das séries converge absolutamente no intervalo $|x-x_0| < R$.

## Série de Taylor

Uma função $f(x)$ pode ser desenvolvida em série de potências tal que:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

Aqui, a série $f(x)$ é desenvolvida em série de Taylor em relação a $x_0$. Os coeficientes da função podem ser aproximados quando $x = x_0 \Rightarrow f(x_0) = a_0$. Se derivarmos $f(x)$ novamente em relação a $x$, teremos:

$$f'(x) = a_1 + 2.a_2(x-x_0) + \ldots + n.a_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots$$

Assim, para $x = x_0 \Rightarrow f'(x_0) = a_1$. Derivando-se novamente $f(x)$, temos:

$$f''(x) = 2.a_2 + 6.a_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1).a_n(x-x_0)^{n-2}$$

Assim, para $x = x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 2a_2$. Derivando-se novamente $f(x)$, obtemos:

$$f'''(x) = 6.a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2).a_n.(x-x_0)^{n-3}$$

Assim, para $x = x_0 \Rightarrow f'''(x_0) = 6a_3$. Dessa forma, é fácil ver que $f^n(x_0) = n!\,a_n \therefore$

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Assim, uma função $f(x)$ que tem uma expressão em série de Taylor em torno de $x = x_0$, pode ser escrita como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad (122).$$

com raio de convergência $R > 0$. Tal função é dita analítica em $x = x_0$.