

MAT 1513 – LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA
1º SEMESTRE DE 2020
PROF^A. DANIELA

SEMANA 30/03 A 03/04

AULA 2 – FUNÇÃO COMPOSTA, FUNÇÃO INVERSA

Sejam X , Y , Z e W conjuntos, e sejam $f: X \rightarrow Y$ e $g: Z \rightarrow W$ duas funções tais que $Y \subset Z$. Então a **função composta** $g \circ f: X \rightarrow W$ é definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ , para todo } x \in X \text{ .}$$

Note: $X \xrightarrow{f} Y \subset Z \xrightarrow{g} W$

É preciso exigir que $Y \subset Z$ para que a operação de composição seja viável, isto é, para poder calcular g em $f(x)$, o valor $f(x)$ precisa pertencer ao domínio de g .

Exemplo 1

1.1) Sejam: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 2$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - 1$.

Nesse caso podemos fazer as duas compostas:

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ é dada por } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = 3(x - 1) + 2 = 3x - 3 + 2 = 3x - 1 \text{ .}$$

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ é dada por } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = 3x + 2 - 1 = 3x + 1 \text{ .}$$

Atenção! Note que, em geral, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

1.2) Sejam $f(x) = \frac{1}{3x}$ e $g(x) = \frac{1}{2x}$.

Note que: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **Obs.** $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

Nesse caso também podemos fazer as duas compostas:

$$f \circ g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ é dada por } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{3\left(\frac{1}{2x}\right)} = \frac{2x}{3}.$$

→ Faça você a outra composta: $g \circ f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.3) Sejam $f(x) = \frac{1}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

Temos que $f: \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ e que $g: \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

→ **Corrigido!**

Nesse caso, nenhuma das compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ está bem definida. Isso ocorre pelo fato de que $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \not\subseteq \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \not\subseteq \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.

Para pensar...

Você consegue dar exemplos de funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $f(g(x)) = g(f(x))$?

Sejam X e Y dois conjuntos, e seja $f: X \rightarrow Y$ uma função **bijetora**. Então existe uma função $f^{-1}: Y \rightarrow X$ com a seguinte propriedade:

$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \text{ para todo } y \in Y$$

e

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \text{ para todo } x \in X$$

Nesse caso, dizemos que a função f^{-1} é a **função inversa** de f , ou então que a função f é **inversível/invertível**.

Nem toda função f admite uma inversa, ou equivalentemente, nem toda função f é invertível. Para que uma função seja invertível, ela precisa ser bijetora, como está destacado na definição acima.

Basicamente, uma função f é uma regra que associa cada elemento de um conjunto X a um elemento do conjunto Y . A função inversa, quando existir, irá fazer o caminho de volta, ou o caminho inverso, isto é, vai devolver cada elemento de Y ao conjunto original X , através da

função f^{-1} .

Existe uma demonstração que garante que uma função f é invertível, se, e somente se, f é bijetora. Mas vou optar por não fazê-la, apesar de não ser difícil. Para quem tiver interesse, veja os exercícios 2, 3 e 4 da página 51 do livro A Matemática do Ensino Médio, Volume 1.

Exemplo 2

2.1) Vamos retomar algumas funções já estudadas.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $Y = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$:

$g: \mathbb{R} \rightarrow Y$ dada por $g(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$h: Y \rightarrow Y$ dada por $h(x) = x^2$, para todo $x \in Y$.

Já vimos, na Aula 1 da Semana de 16/03, que das funções acima, somente a função h é bijetora. Assim, somente ela possuirá inversa, e sua inversa é a função raiz quadrada:

$h^{-1}: Y \rightarrow Y$ é dada por $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$, para todo $y \in Y$.

2.2) Seja $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Temos que f é invertível, pois é bijetora.

De fato, f é injetora, já que se $\frac{1}{x} = \frac{1}{x'}$, então $x = x'$. f é sobrejetora pois, dado

$y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tomando $x = \frac{1}{y}$, segue que $f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$. Note que quando provamos

que f é sobrejetora, a expressão de f^{-1} já apareceu. De fato, $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$, para todo $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nos exemplos acima, optei por escrever a função inversa em termos de y , mas isso é apenas uma escolha. Também está correto escrever, por exemplo em 2.2, que $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

Importante!

→ Se uma função $f: X \rightarrow Y$ é **bijetora**, então o conjunto X é o **domínio** de f , e o

conjunto Y é a **imagem** de f . Nesse caso, a inversa de f existe: $f^{-1}: Y \rightarrow X$, e conjunto Y é o **domínio** de f^{-1} , e o conjunto X é a **imagem** de f^{-1} .

→ O símbolo para a função inversa é f^{-1} . No entanto, ele não deve ser confundido com o inverso multiplicativo de f . Note no Exemplo 2.1 acima. A inversa da função $h(x)=x^2$ é a função $h^{-1}(x)=\sqrt{x}$ e não a função $\frac{1}{x^2}$.

Exercício Resolvido 3

3.1) Considere a função $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

(a) Determine o domínio, o contradomínio e a imagem de f .

(b) f é injetora? f é sobrejetora?

(c) Determine, caso exista, a inversa de f .

Solução:

(a) Os elementos que estão no domínio de f são todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $x-1 \neq 0$. Então o **domínio** de f é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$. O **contradomínio** de f é o conjunto dos números reais. Já a imagem, em geral, é um conjunto mais restrito. A imagem é o conjunto dos pontos que são exatamente da forma $f(x)$, para todo x pertencente ao domínio de f .

Pode ser que exista algum número real que não possa ser escrito da forma $\frac{1}{x-1}$. Então vamos analisar os números que são dessa forma. Se $y = \frac{1}{x-1}$ ($x \neq 1$) então $x-1 = \frac{1}{y}$ e assim

$x = 1 + \frac{1}{y}$. Note que nessa expressão $y \neq 0$. Portanto a **imagem** de f é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Note que, no caso dessa função, a imagem é diferente do contradomínio.

(b) Vamos então considerar $f: \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Dessa forma, f é bijetora.

→ f é injetora: se $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x'-1}$ então $x-1 = x'-1$ e portanto $x = x'$.

→ f é sobrejetora: dado $y \in \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ (imagem de f), se tomarmos $x = 1 + \frac{1}{y}$, então temos que x pertence ao domínio de f (por quê?) e $f(x) = y$.

(c) Como no item (b) provamos que f é bijetora (injetora e sobrejetora), então f possui inversa. E a expressão da inversa da f já foi feita quando provamos que f é sobrejetora. De

fato, $f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{y}$, para todo $y \in \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

3.2) Considere a função $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

(a) Determine o domínio, o contradomínio e a imagem de g .

(b) g é injetora? g é sobrejetora?

(c) Determine, caso exista, a inversa de g .

Solução:

(a) A função g envolve uma raiz quadrada, então precisamos garantir que a expressão dentro da raiz seja positiva. Mas nesse caso, a expressão $x^2 + 1$ é sempre maior ou igual a 1, então a função g pode ser calculada em qualquer número real. Logo o domínio de g é o conjunto $\mathbb{R}$. O contradomínio também é o conjunto $\mathbb{R}$. O contradomínio é qualquer conjunto no qual os valores de $g(x)$ pertencem.

Para determinar a imagem de g , precisamos entender quais são, exatamente, os números reais da forma $\sqrt{x^2 + 1}$, para $x \in \mathbb{R}$. Observe que:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{1} = 1.$$

Logo se $y = \sqrt{x^2 + 1}$ então $y \geq 1$. Então a imagem de g é o conjunto $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$, ou ainda, a imagem de g é o intervalo $[1, +\infty[$.

(b) Vamos considerar $g: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$. Temos que g não é injetora, pelo fator x^2 que aparece em sua expressão. Basta notar que $-1 \neq 1$ mas $g(-1) = g(1) = \sqrt{2}$. Quando colocamos a imagem de g em sua definição, ela é (automaticamente) sobrejetora. De fato, se y pertence à imagem de g , então $y \geq 1$ e y é da forma $\sqrt{x^2 + 1}$, para algum $x \in \mathbb{R}$. Daí

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y^2 - 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Portanto se tomarmos qualquer $x \in \mathbb{R}$ da forma $\sqrt{y^2 - 1}$ ou $-\sqrt{y^2 - 1}$, teremos que $y = g(x)$.

Provamos que um valor de y na imagem de g pode ser obtido por dois valores de x . Isso se dá justamente pelo fato observado acima, no qual vimos que g não é injetora.

(c) Como g não é injetora, ela não pode ser bijetora, logo g não admite inversa.

Observações sobre o exercício 3.2

→ Caso tivéssemos escrito $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, não estaria errado. Mas nesse caso, nem sobrejetora g seria! Pois qualquer número real $y < 1$ não pode ser escrito da forma $g(x)$!

→ Se escrevermos $g:[0,+\infty[\rightarrow [1,+\infty[$ (**restringindo** o domínio de g para os números reais positivos e colocando o contradomínio igual à imagem de g), então nesse caso g é injetora e sobrejetora. Pois agora, se x, x' são dois números reais positivos então

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x'^2+1} \Rightarrow x^2+1 = x'^2+1 \Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{x'^2} \Rightarrow |x| = |x'| \Rightarrow x = x' \quad (\text{pois } x, x' \geq 0).$$

Nesse caso, g é bijetora e portanto possui inversa $g^{-1}:[1,+\infty[\rightarrow [0,+\infty[$ dada por $g^{-1}(y) = \sqrt{y^2-1}$.

A questão de uma função ser invertível vai depender muito da escolha do domínio e o contradomínio da função. Veja no exemplo 3.2 que $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ não é invertível, mas $g:[0,+\infty[\rightarrow [1,+\infty[$ é.

→ Exercício

Considere a função $h(x) = \sqrt{x-1}$.

(a) Determine o domínio e a imagem de h .

(b) h é injetora? h é sobrejetora?

(c) Determine, caso exista, a inversa de h .