Potencial eletrostático

Física III — Aula de 30/03/2020
(Dated: Atualizado em 30/03/2020)

I. POTENCIAL DE DUAS PLACAS INFINITAS CARREGADAS

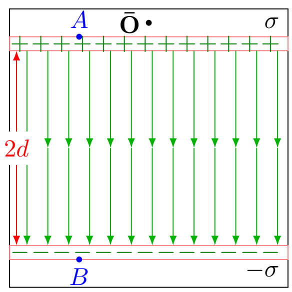

Fig. 1. Placas carregadas

A Fig. 1 mostra as linhas de força produzidas por duas superfícies planas infinitas uniformemente carregadas, com cargas opostas. A placa de cima tem densidade σ, positiva, e a de baixo, $-\sigma$. Queremos calcular a diferença entre os potenciais dos pontos A e B.

As linhas de força, representadas pelos segmentos verdes, são paralelas e estão concentradas na região entre as placas. Isso porque o campo elétrico é uniforme entre as placas. Tanto acima da placa superior como abaixo da placa inferior, o campo é nulo.

Vejamos se entendemos. Vamos tomar um ponto qualquer acima da placa superior na figura, isto é, acima do ponto A. Nessa região, o campo da placa superior aponta para cima, enquanto que o campo da placa inferior, carregada negativamente, aponta para baixo. Os dois campos têm o mesmo módulo $\sigma/(2\epsilon_0)$, conforme vimos ao estudar a lei de Gauss. Esse valor é uniforme, não depende da distância a que o ponto está de cada placa. Uma vez que os dois vetores têm sentidos opostos, o campo resultante é nulo.

A mesma conclusão vale na região abaixo da placa inferior, isto é, abaixo do ponto B. Aqui, o campo devido à placa superior é dirigido para baixo, enquanto o campo devido à placa inferior é dirigido para cima. Os módulos são também iguais a $\sigma/(2\epsilon_0)$. Os dois campos, opostos, somam zero.

Já na região entre as placas, os dois campos, devidos às duas superfícies, são dirigidos para baixo. Como os módulos são $\sigma/(2\epsilon_0)$, a soma dos dois tem módulo $E = \sigma/\epsilon_0$. E como esse campo é uniforme, as linhas de força são paralelas, como mostra a figura.

Podemos agora calcular, facilmente, a diferença de potencial entre os pontos A e B. Basta lembrar a definição de potencial:

$$V(P) = -\int_{\bar{O}}^{P} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{1}$$

Essa expressão vale para o ponto A:

$$V(A) = -\int_{\bar{O}}^{A} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{2}$$

e vale para o ponto B:

$$V(B) = -\int_{\bar{O}}^{B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{3}$$

Se subtrairmos a Eq. (2) da Eq. (3), teremos imediatamente que

$$V(B) - V(A) = -\int_{A}^{B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{4}$$

A integral à direita pode ser feita ao longo de qualquer caminho, pois seu valor independe da trajetória. O mais fácil é tomar o caminho mais curto: vertical, de A até B. Nesse caminho, andaremos sempre na direção e no sentido do campo elétrico. O produto escalar $\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ se reduz, consequentemente, ao produto aritmético do módulo E do campo pelo deslocamento dr. A Eq. (4) equivale à expressão

$$V(B) - V(A) = -E\int_{A}^{B} dr. \tag{5}$$

Aqui, extraímos o módulo E, que é constante, da integral no lado direito.

A integral que restou é, simplesmente, o comprimento da reta que une A a B, isto é, a distância $2d$ indicada na figura. E, como já vimos, $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Assim, a Eq. (5) se reduz à expressão

$$V(B) - V(A) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} 2d. \tag{6}$$

O lado direito é negativo porque o potencial do ponto B é menor do que o potencial de A. De fato, o potencial cai quando se caminha no sentido de uma linha de força, e foi exatamente isso que fizemos ao ir de A até B. Por isso, é mais conveniente trocar os sinais dos dois lados da Eq. (6) e escrever que

$$V(A) - V(B) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} 2d. \tag{7}$$

A. Capacitores

A Eq. (7) será útil mais adiante, quando estudarmos circuitos elétricos. O sistema esquematizado na Fig. 1 é um dos elementos dos circuitos, conhecido como *capacitor*. Na prática, os capacitores são constituídos por duas placas metálicas separadas por uma distância uniforme. As placas não são infinitas, é evidente, mas as dimensões delas são tão grandes em comparação com a distância entre elas que é uma ótima aproximação tomá-las como infinitas.

B. Membranas

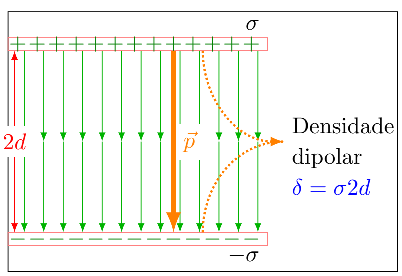

Fig. 2. Dipolo entre placas paralelas.

O par de superfícies carregadas é ainda mais importante na biologia. Para explicar por quê, vamos primeiro examinar a Fig. 2, que oferece outra visão do par de superfícies. Agora, como sugerido pela seta laranja na figura, em lugar de pensar em uma superfície carregada e depois na outra, nós olhamos para um par de cargas de sinais opostos: uma pequena carga Δq na superfície superior e a carga simétrica, $-\Delta q$, na superfície inferior. Esse par de cargas separadas pela distância $2d$ define um dipolo, cujo momento tem módulo

$$\Delta p = \Delta q 2d. \tag{8}$$

Na placa de cima, a carga Δq ocupa uma pequena área ΔA. Na placa de baixo, a carga $-\Delta q$ ocupa a mesma área. Cargas e áreas são relacionadas pela igualdade $\sigma = \Delta q/\Delta A$. Assim, podemos reescrever a Eq. (7) na forma

$$V(A) - V(B) = \frac{\Delta q}{\Delta A\, \epsilon_0} 2d, \tag{9}$$

e, com ajuda da Eq. (8), podemos simplificar o lado direito:

$$V(A) - V(B) = \frac{\Delta p}{\Delta A\, \epsilon_0}. \tag{10}$$

Assim como definimos a densidade de cargas σ como a carga em uma certa região dividida pela área da mesma região, podemos definir a *densidade dipolar* como o momento dipolar dividido pela área que ele ocupa, nas duas placas. Em outras palavras, definimos a densidade dipolar

$$\delta = \frac{\Delta p}{\Delta A}. \tag{11}$$

Com isso, a Eq. (10) assume a forma

$$V(A) - V(B) = \frac{\delta}{\epsilon_0}. \tag{12}$$

Essa igualdade nos ensina mais do que a expressão equivalente (7). A Eq. (12) nos diz que uma distribuição uniforme de dipolos paralelos produz uma diferença de potencial. Isso é importante porque, em contraste com cargas livres, dipolos são muito comuns na natureza.

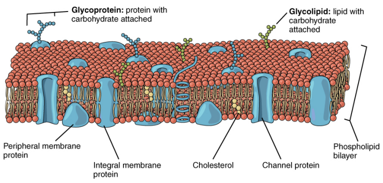

Fig. 3. Membrana biológica (fonte: wikipedia).

A Fig. 3 mostra um exemplo. Vê-se ali uma representação pictórica de uma membrana biológica. A membrana é constituída por moléculas orgânicas relativamente compridas alinhadas verticalmente e dispostas lado-a-lado no plano horizontal. Uma molécula, já sabemos, pode formar um dipolo, com carga positiva num extremo e negativa no outro. Por isso, um aglomerado de moléculas como o da figura tem a estrutura de cargas esquematizada na Fig. 2, que resulta numa diferença de potencial entre a regiões acima e abaixo da membrana, como indica a Eq. (12).

As células que compõem os seres vivos são encapsuladas em membranas. As membranas não são planas, mas como sua espessura é muito pequena em comparação com as outras dimensões, podemos tratar uma pequena região delas como se fosse plana. É como a Terra, que parece plana porque nossas alturas são muito pequenas em comparação com o raio do planeta.

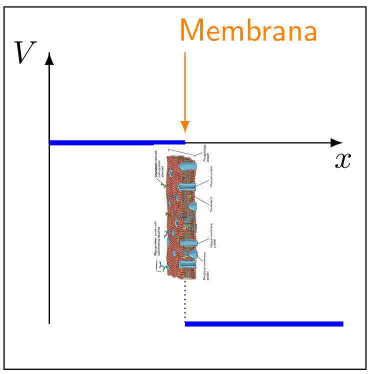

Fig. 4. Diferença de potencial devida a uma membrana.

Vale, portanto, nossa conclusão. Os dipolos das moléculas produzem uma diferença de potencial entre as duas superfícies da membrana. Se nós imaginarmos uma viagem em que começamos fora de uma célula, avançamos até atravessar a membrana que a envolve e, por fim, entramos na célula, veremos o potencial variar como na Fig. 4. Tomamos como referência o potencial na região externa, que corresponde a pequenos valores de x na figura. Quando atravessamos a membrana o potencial cai, como se fôssemos do ponto A para o ponto B na Fig. 1. Dentro da célula (pontos à direita na Fig. 4, com maiores valores de x) o potencial é negativo.

Esse potencial negativo impede que íons carregados negativamente penetrem na célula. Em condições normais, o potencial funciona como uma barreira, ou escudo, que bloqueia o acesso desses íons.

Em certas situações, entretanto, pode ser interessante que íons negativos penetrem na célula. Pode ser, por exemplo, que a célula precise receber nutrientes do meio. Nesse caso, para permitir que a carga negativa entre, a célula precisa reduzir a barreira de potencial.

Para baixar a barreira, a dinâmica biológica emprega um procedimento que vale a pena examinar. Abrem-se na membrana canais estreitos que deixam entrar íons de sódio. Os íons de sódio são positivamente carregados e, ao contrário dos íons negativos, perdem energia ao atravessar a diferença de potencial na Fig. 4. Assim, quando se abrem os canais que permitem a entrada, os íons de sódio invadem a célula. Como eles são positivos, elevam o potencial no interior da célula e neutralizam a diferença de potencial representada pelo degrau na figura. Com isso, levantam a barreira que impedia o ingresso de íons negativos.

O fluxo de íons negativos é limitado. Depois que um certo número deles entra, o potencial no interior da célula volta a se tornar negativo, e o escudo protetor volta a aparecer. Assim, graças à membrana, a célula dispõe de um mecanismo que permite controlar o o número de íons negativos que nela entram e usa esse mecanismo para trocar substâncias com o meio em que estão. A base de tudo é a Eq. (12). A eletricidade é parte importante da vida.

Exercício: 1 *Uma membrana é constituída por moléculas com* $10\,\mathrm{nm}$ *de comprimento, compactadas de forma que, no plano da membrana, pode contar-se uma molécula por* nm^2. *Sabe-se que a carga em cada extremidade da molécula equivale a* $\pm 0.1\mathrm{e}$*, onde* e *é a carga eletrônica. Qual é a diferença de potencial entre as duas superfícies da memabrana?*