

# Provinha 1 (Lista de exercícios sobre Corpos Rígidos) – 01/04/2020

4302306 – Mecânica II – 1º Semestre 2020 – IFUSP Noturno – Prof. Airton Deppman

## Avisos:

- Entrega até dia 08/04/2020 às 23:59 (em 1 semana) por email para paula.matuoka@usp.br.
- Formatos aceitos: fotos de celular, páginas escaneadas, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X... desde que o texto seja legível.
- São 10 questões valendo 1,0 ponto cada.
- Os exercícios extras – somados – valem 1,0 ponto e podem ajudar a nota final  $P_1$ .
- Após somar os pontos das 10 questões e dos exercícios extras, a nota final será  $P_1 \leq 10,0$ .

## Questão 1:

Um *CubeSat* é um satélite de dimensões reduzidas que pode ser utilizado por empresas e universidades em aplicações espaciais pontuais e de curto prazo. É lançado em órbita próxima à Terra por foguetes ou a partir da Estação Espacial Internacional com o auxílio de braços mecânicos. Após seu tempo de vida útil, ele entra na atmosfera terrestre e se desintegra, não gerando lixo espacial.

Um módulo CubeSat corresponde a um cubo de 10 cm de aresta e 1kg de massa. Para pequenas correções de posicionamento, são utilizadas rodas de reação elétricas, que aplicam torque ao redor dos eixos de rotação do satélite na direção contrária ao deslocamento, restaurando sua orientação preferencial de trabalho sem gastar muita energia. Para tal, é essencial conhecer o tensor momento de inércia do satélite e identificar seus eixos principais.

Calcule o tensor momento de inércia de um CubeSat de aresta  $a$ , massa  $M$  e densidade uniforme, quando seu eixo de rotação:

- coincide com uma das arestas;
- passa pelo centro geométrico do cubo e é paralelo a uma das arestas;
- coincide com a diagonal do cubo.

**Extra 1:** Qual matriz de rotação que leva o cubo de (a) para (c) diretamente?

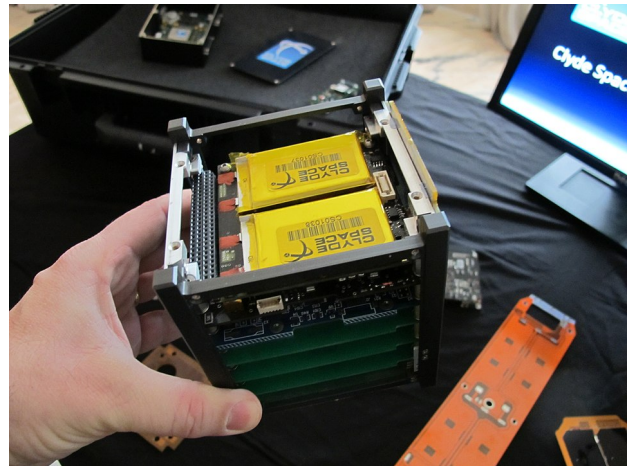


Figura 1: 1U CubeSat (Fonte: Wikipedia)

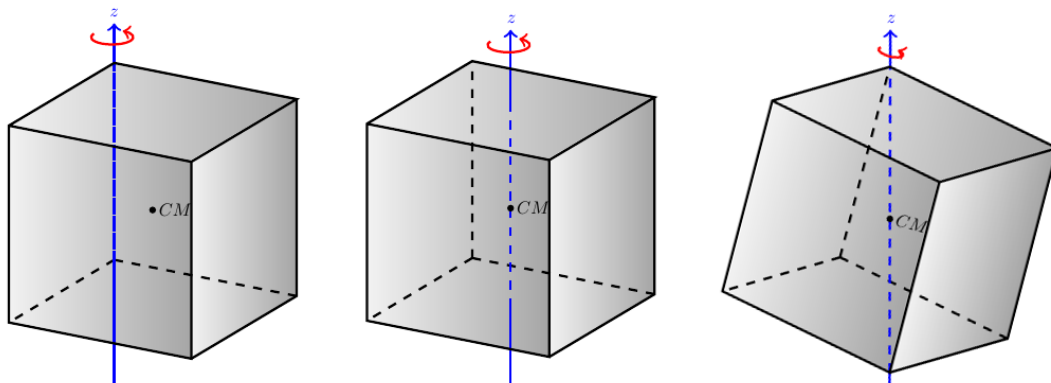


Figura 2: Questão 1; casos (a), (b) e (c).

## Questão 2:

Considere um cone sólido, reto, de densidade uniforme, massa  $M$ , raio da base  $R$  e altura  $H$ .

- (a) Encontre o tensor momento de inércia para rotações ao redor do seu eixo de simetria.
- (b) Encontre a velocidade angular do cone quando sua superfície lateral está apoiada e gira em uma superfície sem deslizar com o ápice  $O$  fixo e velocidade  $v$  no ponto  $P$  no centro de sua base circular.

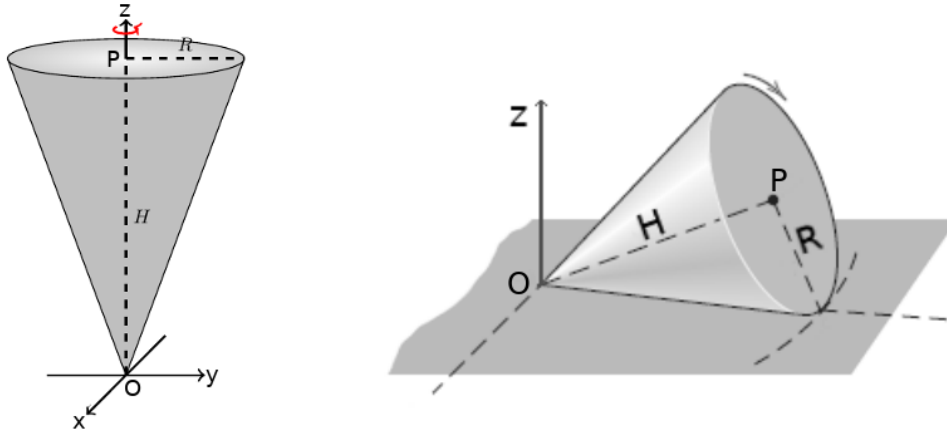


Figura 3: Questão 2: casos (a) e (b).

## Questão 3:

- (a) Encontre o momento de inércia de uma casca esférica de raio  $r$ , densidade superficial uniforme e massa  $m$ , em torno de seu eixo de simetria.
- (b) Encontre o momento de inércia de uma esfera sólida de raio  $r$ , densidade volumétrica uniforme e massa  $M$  em torno de seu eixo de simetria.

## Questão 4:

Encontre o momento de inércia no eixo de simetria dos seguintes casos:

- (a) três massas idênticas  $m$  com hastes rígidas de massa desprezível formando um triângulo equilátero de lado  $l$ .
- (b) uma placa na forma de um triângulo equilátero de lado  $l$ , densidade uniforme e massa  $M$ .

**Extra 2:** um *triângulo de Sierpinski* (estrutura fractal formada pelo processo recursivo de retirar de uma superfície triangular uma figura similar cuja altura é metade daquela da figura original) equilátero, de lado  $a$ , feito de material de densidade uniforme, e de massa  $M$ .



Figura 4: Formação do triângulo de Sierpinski.

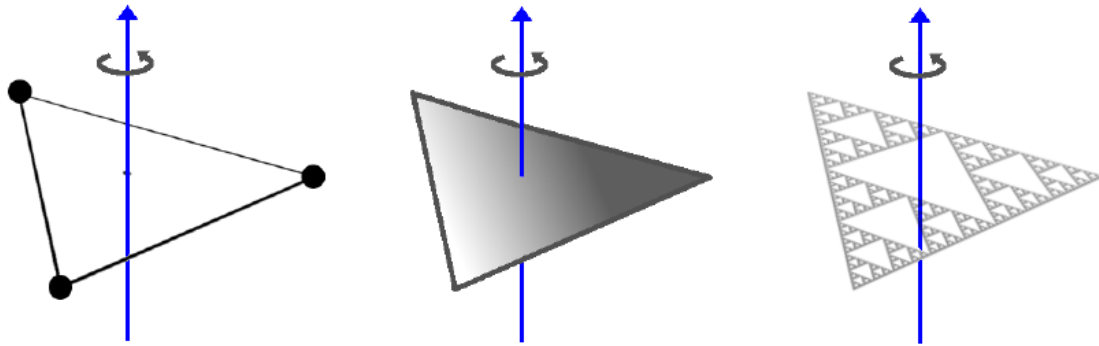


Figura 5: Questão 4: casos (a), (b) e Extra 2.

### Questão 5:

Seja um objeto cujos momentos principais são  $I_1 > I_2 > I_3$ .

Para rotações ao redor dos eixos principais e sem dissipação de energia, discuta a estabilidade dos movimentos para pequenas perturbações.

**Extra 3** Discuta o que aconteceu com o satélite *Explorer I* da NASA - que foi projetado para girar em torno de seu eixo de menor momento de inércia e acabou girando em torno do eixo de maior momento de inércia.

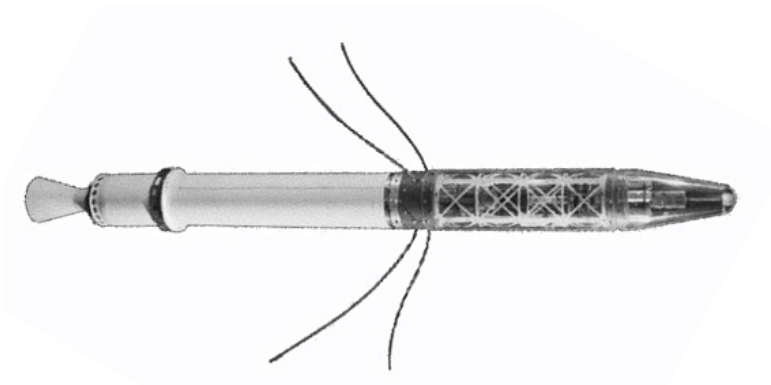


Figura 6: Explorer I (fonte: NASA).

**Extra 4:** Discuta o *Efeito Dzhanibekov* ou *Efeito da Raquete de Tênis* com base na estabilidade dos eixos principais.

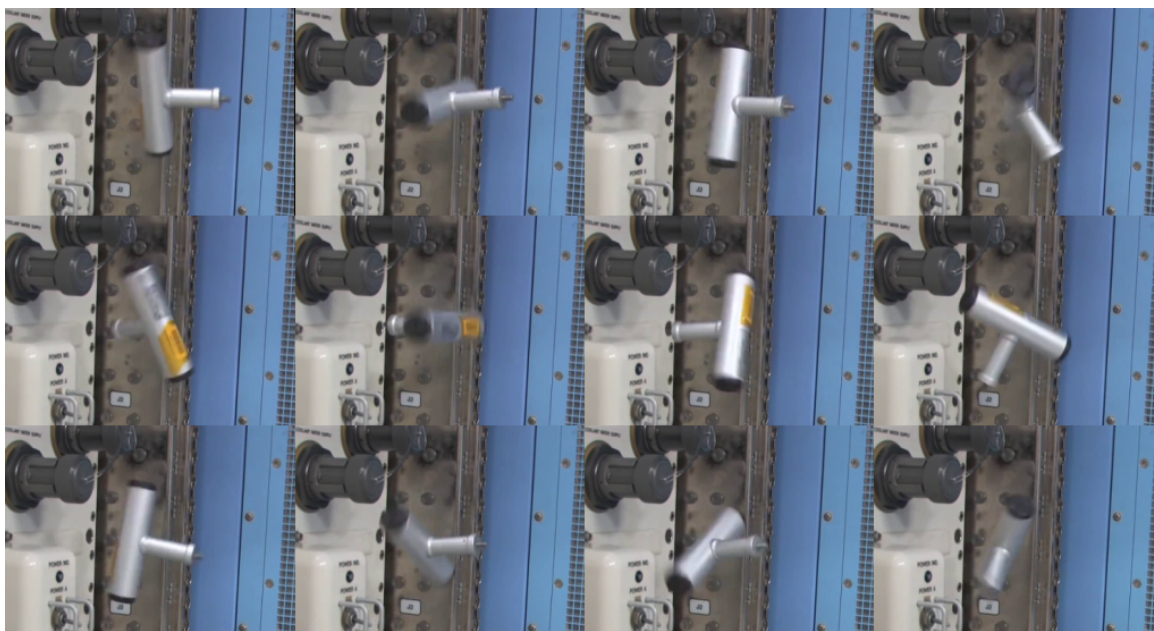


Figura 7: Efeito Dzhanibekov no espaço: fotos sequenciais - da esquerda para a direita, de cima a baixo - indicando a mudança de orientação de uma ferramenta em experimento realizado no espaço. Veja o vídeo: [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Dzhanibekov\\_effect.ogv](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Dzhanibekov_effect.ogv)

**Extra 5:** Discuta o *Efeito Rattleback* - que ocorre com alguns objetos que possuem uma direção preferencial de rotação.

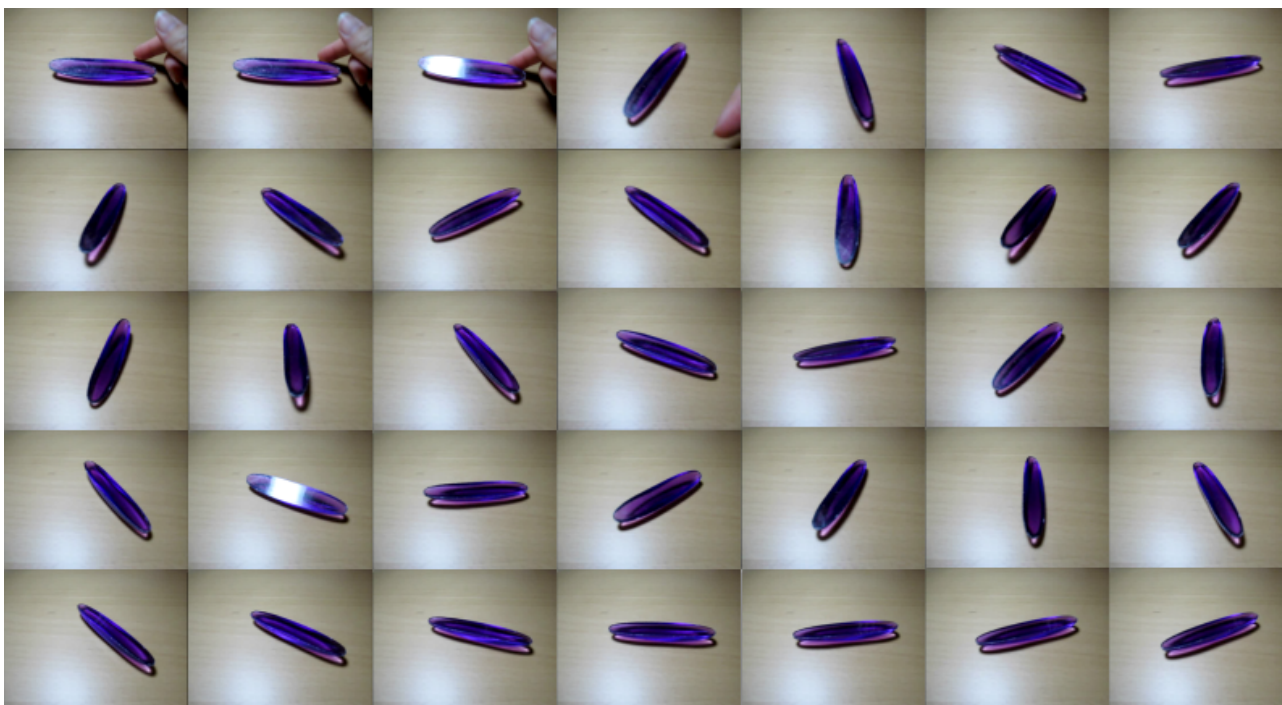


Figura 8: Efeito Rattleback: fotos sequenciais - da esquerda para a direita, de cima a baixo - de um objeto que, inicialmente, gira na direção horária e, em um certo ponto, passa a girar na direção anti-horária. Veja o vídeo: [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Rattleback\\_in\\_action.ogv](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Rattleback_in_action.ogv)

## Questão 6:

Encontre a Lagrangeana e as equações do movimento de um pêndulo duplo nas seguintes condições:

- Pêndulo duplo formado por duas hastes rígidas de comprimento  $l_1$  e  $l_2$  de massas desprezíveis e duas massas  $m_1$  e  $m_2$  em suas respectivas extremidades
- Pêndulo duplo de massa distribuída formado por duas chapas retangulares de comprimentos  $l_1$  e  $l_2$  de massas  $m_1$  e  $m_2$  uniformemente distribuídas unidas por um pivô.
- Demonstre para quais condições o caso (b) se reduz ao caso (a).

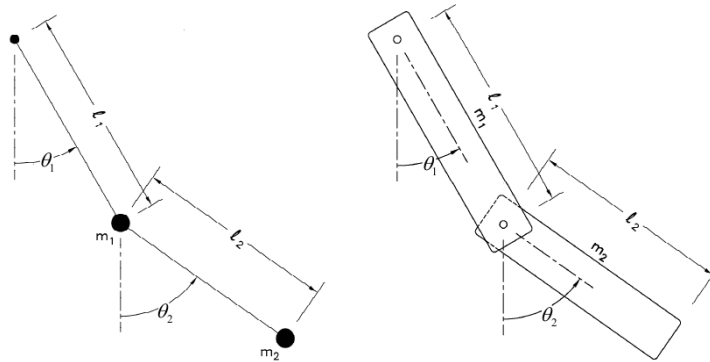


Figura 9: Questão 6, casos (a) e (b).

## Questão 7:

Seja um pêndulo plano – formado por uma haste de massa  $m_r$  e comprimento  $l$  presa ao teto em uma extremidade e acoplada a um disco de raio  $r$  e massa  $m_d$ . Calcule o período de oscilação quando:

- O disco está fixo à haste.
- O disco está livre para girar.

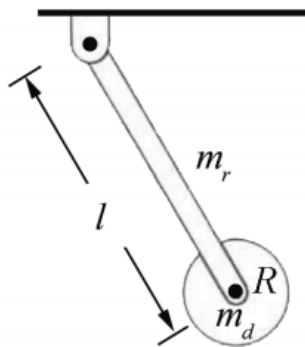


Figura 10: Questão 7, casos (a) e (b).

## Questão 8:

- Encontre a Lagrangeana de um pêndulo de Foucault composto por uma massa  $m$  e um fio inextensível de comprimento  $l$  situado no hemisfério norte a uma latitude  $\lambda$ .
- Qual período de precessão do pêndulo do caso (a) em função da latitude?

**Extra 6:** encontre as equações de movimento do pêndulo.

## Questão 9:

Considere uma moeda de raio  $R$  e massa uniforme  $m$  girando em uma superfície sem escorregar. Suponha que, após um certo tempo, a moeda oscile com inclinação  $\theta$  em relação à superfície de apoio, e que seu centro de massa esteja em repouso.

- (a) Qual a velocidade angular  $\omega$  da moeda?
- (b) Qual a frequência angular  $\Omega$  do ponto de contato com a superfície?

*Dica:* na internet é possível encontrar vídeos sobre *Disco de Euler*, um disco de dimensões maiores que as da moeda, com modificações para minimizar o atrito, e que proporciona maior tempo de observação.

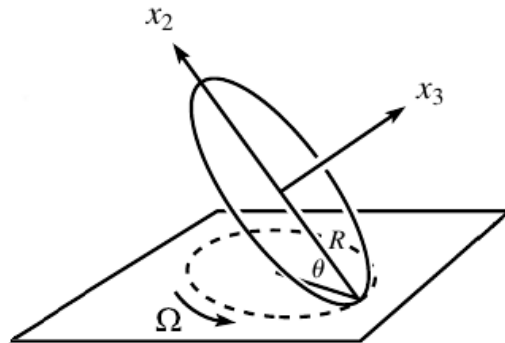


Figura 11: Questão 9: moeda oscilando.

## Questão 10:

(Goldstein, Cap. 5) Suponha que em um pião simétrico cada elemento de massa tem uma carga proporcional associada a ele de forma que a razão  $e/q$  é constante – o chamado *pião simétrico carregado*.

(a) Mostre que se, tal corpo gira em um campo magnético uniforme, sua Lagrangeana é dada por  $L = T - \omega_l \cdot \mathbf{L}$ .

(b) Mostre que  $T$  é constante (o que é decorrente da propriedade da Força de Lorentz de que um campo magnético não realiza trabalho em uma carga em movimento) e encontre outras constantes do movimento.

(c) Assumindo  $\omega_l$  muito menor que a velocidade angular inicial ao redor do eixo de simetria do pião, obtenha a expressão para as frequências e amplitudes de nutação e precessão.

(d) Qual a origem das energias cinéticas de nutação e precessão?

**Extra 7:** o *Levitron* é um brinquedo conhecido como *pião magnético*, composto por um ímã pequeno no formato de pião e um ímã grande na forma de anel, sob uma plataforma de plástico ou madeira. Descreva o efeito da levitação magnética do brinquedo.



Figura 12: Levitron. Veja o vídeo: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Levitron-levitating-top-demonstrating-Roy-M-Harrigans-spin-stabilized-magnetic-levitation.ogv>