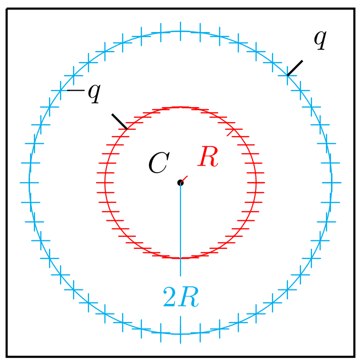
Resolução da Segunda prova

Nícolas André da Costa Morazotti

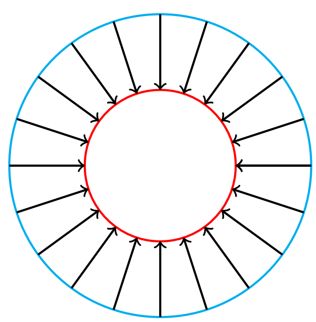
1 de Abril de 2020

Primeiro exercício

As duas superfícies esféricas concêntricas mostradas na figura estão uniformemente carregadas. As superfícies são não-metálicas. A superfície de fora tem raio $2R$ e tem carga positiva q. A de dentro tem raio R e carga $-q$. Mede-se a distância r do ponto C, no centro das duas superfícies, e toma-se o ponto de referência $\bar{O}$ para medida de potencial no infinito.



(a) Desenhe as linhas de força;



(b) O potencial $V(r = 0)$, no ponto C, é positivo, nulo ou negativo? Explique sua resposta sem fazer contas, apenas com base em argumentos gerais.

Como colocamos o ponto de referência no infinito, ou seja, $V(\infty) = 0$, e que os pontos fora da superfície maior têm $\mathbf{E} = 0$, ou seja, $V = cte = V(\infty) = 0$, então a superfície com $r = 2R$ está no zero do potencial também. Como, com $r \in [R, 2R]$, o campo aponta para dentro, então o potencial deve **diminuir** conforme r diminui, ou **aumentar** conforme r aumenta. Assim, o potencial na região $r \in [R, 2R]$ é **negativo**.

(c) Encontre o potencial $V(r)$ para $r > 2R$;

Como afirmado anteriormente, para qualquer ponto fora da casca, $V(r) = 0$.

(d) Encontre o potencial $V(r)$ para $2R > r > R$;

Podemos calcular o potencial na região em questão utilizando o campo elétrico, obtido da Lei de Gauss, e integrando do raio $2R$ até algum raio $r > R$. Pela Lei de Gauss, utilizando uma superfície gaussiana esférica com raio $r > R$,

$$E 4\pi r^2 = \frac{-q}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\mathbf{E} = -\hat{r}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{2}$$

A diferença de potencial então é

$$V(r) - \underbrace{V(2R)}_{\equiv 0} = -\int_{2R}^{r} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \tag{3}$$

Escolheremos um caminho radial, que sai de R e vai até r. Como é uma linha reta, então $d\mathbf{r} = -\hat{r}dr$.

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{2R}^{r}\frac{d\mathbf{r}'}{r'^2} \tag{4}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\bigg|_{2R}^{r} \tag{5}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R}\right). \tag{6}$$

Veja que, de fato, o potencial na casca de fora se anula ao tomarmos $r = 2R$.

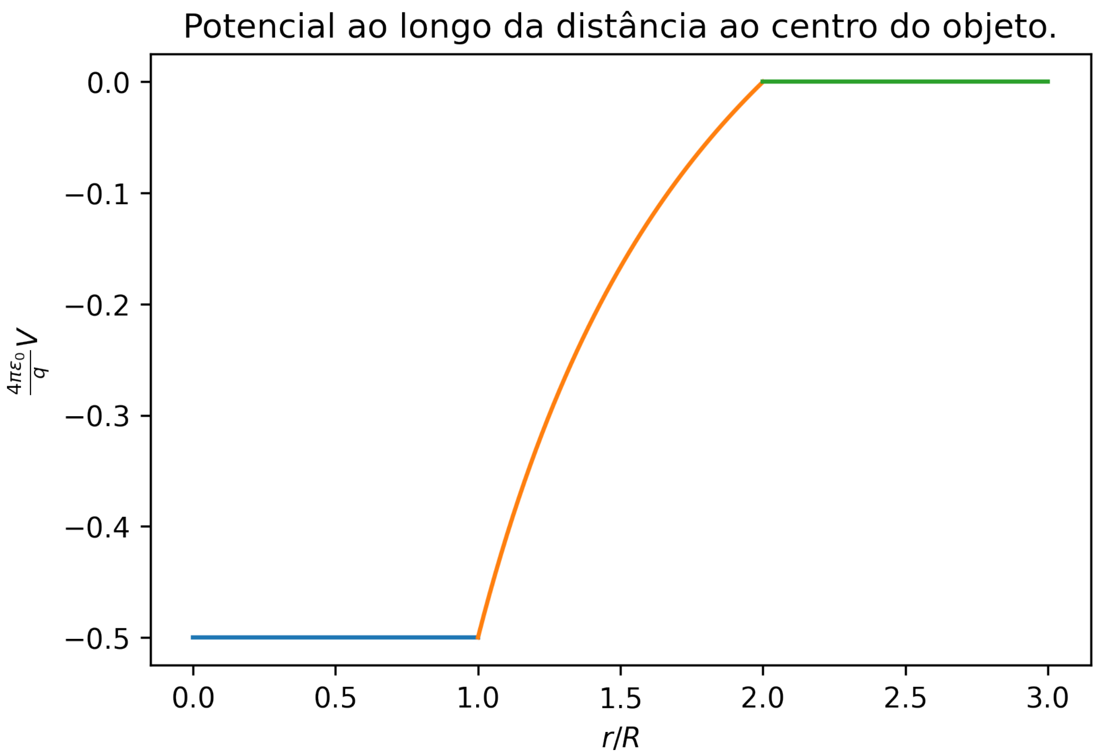
(e) Encontre o potencial $V(r)$ para $r < R$.

Como o campo elétrico na região $r < R$, pela Lei de Gauss, é nulo, o potencial lá é constante e igual ao potencial na casca $r = R$. Assim,

$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) \tag{7}$$

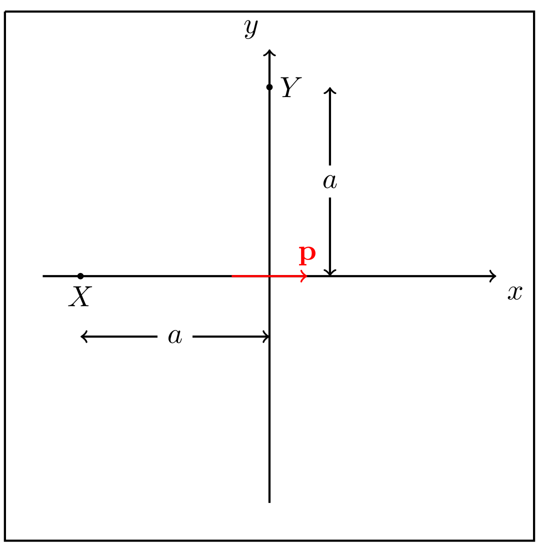
$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2-1}{2R}\right) \tag{8}$$

$$= -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}. \tag{9}$$



Segundo exercício

No sistema cartesiano da figura abaixo, o eixo z não aparece porque é perpendicular ao plano da figura. Responda às perguntas abaixo nesse sistema de coordenadas. Um dipolo com momento $\mathbf{p} = p\hat{x}$ está posicionado na origem.



(a) Encontre o potencial no ponto Y, com coordenadas $(0, a, 0)$, onde $a > 0$. Interprete fisicamente o resultado;

Podemos utilizar a expressão do potencial de dipolo, para uma distância maior que a distância das cargas do dipolo

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} && (10) \\
&= \frac{px}{4\pi\varepsilon_0 r^3} && (11) \\
V(0, a, 0) &= \frac{p \times 0}{4\pi\varepsilon_0 a^3} && (12) \\
&= 0. && (13)
\end{aligned}
$$

O potencial é nulo pois são duas cargas de mesma intensidade, mas sinais opostos, equidistantes ao ponto. Então a soma do potencial de ambas se anula.

(b) Encontre o vetor campo elétrico no mesmo ponto Y;

O vetor do campo elétrico pode ser escrito como o negativo do gradiente de V. Temos de calcular o gradiente de V:

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) &= \frac{px}{4\pi\varepsilon_0 r^3} && (14) \\
\nabla V(\mathbf{r}) &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}(x\nabla r^{-3} + r^{-3}\nabla x) && (15) \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(-3\hat{r}\frac{x}{r^4} + \hat{x}\frac{1}{r^3}\right) && (16) \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(-3\mathbf{r}\frac{x}{r^5} + \hat{x}\frac{1}{r^3}\right) && (17) \\
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3\frac{(\mathbf{p} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right] && (18) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3(\mathbf{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{p}]. && (19)
\end{aligned}
$$

Agora que temos a expressão geral do campo elétrico, basta substituir a posição calculada por $\mathbf{r} = a\hat{y}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(0, a, 0) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^3}[3\underbrace{(\mathbf{p} \cdot \hat{y})}_{\equiv 0}\hat{y} - \mathbf{p}] && (20) \\
&= -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}. && (21)
\end{aligned}
$$

(c) Encontre o vetor campo elétrico no ponto X, com coordenadas $(-a, 0, 0)$;

Para encontrar o campo elétrico no ponto X, podemos utilizar a equação 19 substituindo no ponto $\mathbf{r} = -a\hat{x}$. Desta forma,

$$\mathbf{E}(-a, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^3}[3(-\mathbf{p} \cdot \hat{x})(-\hat{x}) - \mathbf{p}] \tag{22}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^3}(3\mathbf{p} - \mathbf{p}) \tag{23}$$

$$= \frac{\mathbf{p}}{2\pi\varepsilon_0 a^3}. \tag{24}$$