

**EXERCÍCIO 1** – Resolva as seguintes E.D.O.s abaixo:

a)  $\dot{y} = \frac{x^2}{y};$

b)  $\dot{y} - \frac{x^2}{y(1+x^3)} = 0;$

c)  $\dot{y} + y^2 \sin(x) = 0;$

d)  $\dot{y} = \frac{(3x^2-1)}{(3+2y)};$

e)  $\dot{y} = (\cos^2 x)(\cos^2 2y);$

**EXERCÍCIO 2** – Numa colmeia, a razão de crescimento da população é uma função da população. Assim,

$$\frac{dp}{dt} = f(p).$$

Dessa forma, pede-se

- a) Calcular  $p(t)$  para  $f(p) = \beta p$ , sendo  $\beta$  uma constante positiva. Determine, a partir do resultado obtido, a população limite do sistema;
- b) Encontre  $p(t)$  para  $f(p) = \beta p - k^2 p^2$ , sendo  $\beta$  e  $k$  constantes positivas. Determine, a partir do resultado obtido, a população limite do sistema.

**EXERCÍCIO 3** – A população de uma cidade é de 1.000.000 de habitantes. Houve uma epidemia e 10% da população contraiu um vírus. Em sete dias, essa percentagem cresceu para 20%. O vírus se propaga por contato direto entre indivíduos enfermos e sãos (logo, é proporcional ao número de contatos). A partir desses dados e supondo que o modelo seja fechado, isto é, a população se mantém constante, sem nascimentos, mortes ou migração, e os indivíduos tendo toda a liberdade de interagir, calcule:

- a) A proporção de indivíduos enfermos e sãos, como uma função do tempo, sabendo que:

$$x = \frac{n_e}{n},$$

$$y = \frac{n_s}{n},$$

$$x + y = 1,$$

$$n_e + n_s = n,$$

com

$n$  = número total de habitantes

$n_e$  = número de indivíduos enfermos

$n_s$  = número de indivíduos sãos  
 $x$  = proporção de indivíduos enfermos  
 $y$  = proporção de indivíduos sãos

$$\frac{dx}{dt} = kxy$$

sendo  $k$  uma constante de proporcionalidade dos contatos.

- b) O tempo necessário para que a percentagem de indivíduos enfermos seja de 50%.

**EXERCÍCIO 4** – O calor transferido de um corpo para seu ambiente por radiação, baseado na lei de Stefan-Boltzmann, é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{du}{dt} = -\alpha(u^4 - T^4), \quad (1)$$

sendo  $u(t)$  a temperatura absoluta (em Kelvin) do corpo no instante  $t$ ,  $T$  a temperatura absoluta do ambiente, e  $\alpha$  uma constante que depende dos parâmetros físicos do corpo. No entanto, se  $u$  for muito maior do que  $T$ , a equação (1) pode ser reduzida à:

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u^4. \quad (2)$$

Suponha, assim, que um corpo, a uma temperatura inicial de 2000 K, está em um meio à temperatura de 300 K e que  $\alpha = 2 \times 10^{-12} K^{-3} s^{-1}$ . Dessa forma, pede-se:

- Determine a temperatura do corpo num instante  $t$  qualquer resolvendo a equação (2);
- Faça o gráfico de  $u$  em função de  $t$ ;
- Encontre o instante  $\tau$  no qual  $u(\tau) = 600$ , ou seja, o dobro da temperatura ambiente.

**EXERCÍCIO 5** – Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais não-lineares redutíveis a lineares:

- $x^2 \dot{y}(x) + 2xy(x) - y^3(x) = 0, x > 0$ ;
- $\dot{y} = ry - ky^2, r > 0$  e  $k > 0$  são constantes;
- $\frac{dy}{dt} = (\Gamma \cos(t) + T)y - y^3, \Gamma$  e  $T$  são constantes;
- $\dot{y} = 1 + t^2 - 2ty + y^2$ , sendo  $y = t$  solução particular;
- $\dot{y} = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2$ , sendo  $y = \frac{1}{t}$  solução particular;
- $\frac{dy}{dt} = \frac{2 \cos^2(t) - \sin^2(t) + y^2}{2 \cos(t)}$ , sendo  $y = \sin(t)$  solução particular;
- $y = x(y')^2 + 2xy'$ ;
- $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$ ;
- $3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 y = \left[2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 1\right] x$ .

**EXERCÍCIO 6** – Verifique se cada uma das E.D.O.s abaixo é exata ou não. Caso alguma delas não seja, ache o fator integrante. Para cada equação, ache a solução implícita.

- $(2x + 3)dx + (2y - 2)dy = 0$ ;
- $(2x + 4y)dx + (2x - 2y)dy = 0$ ;
- $(e^x \sin(y) - 2y \sin(x))dx - (e^x \cos(y) - 2 \cos(x))dy = 0$ ;

- d)  $(ye^{xy} \cos(2x) - 2e^{xy} \sin(2x) + 2x)dx - (xe^{xy} \cos(2x) - 3)dy = 0$   
 e)  $(2xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + 2x)dy = 0$ ;  
 f)  $(x \ln(y) + xy)dx + (y \ln(x) + xy)dy = 0, x > 0, y > 0$ .

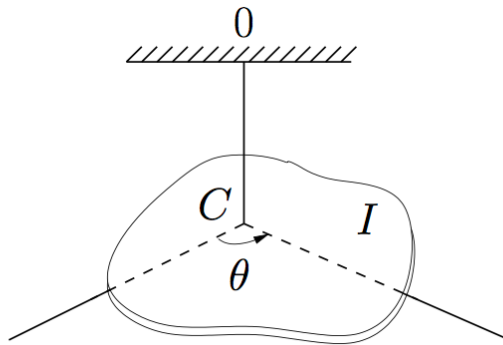
**EXERCÍCIO 7** – Determine a solução geral das equações diferenciais abaixo:

- a)  $\ddot{y} + y = \tan x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  
 b)  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = x^{-2}e^{-2x}$ ;  
 c)  $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \frac{e^t}{(1+t^2)}$ ;

**EXERCÍCIO 8** – Dada as equações diferenciais abaixo, determine a solução geral e a solução particular de cada uma delas. As soluções particulares deverão ser determinadas de acordo com as condições iniciais especificadas.

- a)  $y'' + y' - 2y = 2x, y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$ ;  
 b)  $\ddot{y} + 4y = x^2 + 3e^x, y(0) = 0$  e  $y'(0) = 2$ ;  
 c)  $y'' - 2y' + y = xe^x + 4, y(0) = 1$  e  $y'(0) = 1$ ;  
 d)  $y'' + 4y = 3 \sin(2x), y(0) = 2$  e  $y'(0) = -1$ .

**EXERCÍCIO 9** – O pêndulo de torção consiste em um corpo suspenso por um fio (vide figura abaixo) de modo que a linha  $OC$  passe pelo centro de massa do corpo.



Quando o corpo sofre uma rotação de ângulo  $\theta$ , a partir de sua posição de equilíbrio, o fio é torcido e passa a exercer um torque  $\tau$  sobre o corpo, em torno do eixo  $OC$ , que se opõe ao deslocamento  $\theta$  com módulo proporcional a  $\theta$ . Temos, assim, para pequenas torções:

$$\tau = -k\theta,$$

sendo  $k$  o coeficiente de torção do fio. Chamando de  $I$  o momento de inércia do corpo em relação ao eixo  $OC$  e sendo  $\alpha$  a aceleração angular, temos:

$$\tau = I\alpha \Rightarrow -k\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (1)$$

sendo  $\omega$  a velocidade angular, a qual é dada por:

$$\omega^2 = \frac{k}{I} \quad (2)$$

Sabendo que a relação entre período,  $T$ , e a velocidade ou frequência angular,  $\omega$ , é dada por  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , então:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad (3)$$

A partir da equação para o período, podemos determinar experimentalmente o momento de inércia de um corpo, deixando-o suspenso por um fio cujo coeficiente é conhecido e, em seguida, medindo o período  $T$  de oscilação. Com o exposto acima, determine a solução geral da E.D.O. (1) em função do momento de Inércia  $I$ .

**EXERCÍCIO 10** – A E.D.O. linear de 2ª ordem da forma

$$x^2\ddot{y}(x) + ax\dot{y}(x) + by(x) = 0 \quad (1)$$

é conhecida como equação Euler-Cauchy, sendo  $x > 0$  e  $a$  e  $b$  constantes. A equação Euler-Cauchy tem solução da forma

$$y(x) = x^m. \quad (2)$$

Calculando-se a primeira e a segunda derivada da equação (2) em relação  $x$ , obtém-se:

$$\dot{y}(x) = mx^{m-1} \quad (3)$$

e

$$\ddot{y}(x) = m(m-1)x^{m-2} \quad (4)$$

Substituindo as equações (2), (3) e (4) na equação (1), chega-se à:

$$m(m-1)x^m + amx^m + bx^m = 0 \quad (5)$$

Repare que  $x^m$  será um termo comum em toda a equação. Como  $x > 0$ , então  $x^m \neq 0$ . Assim, podemos dividir a equação (5) por  $x^m$ , tal que será obtida a seguinte equação de segundo grau:

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \quad (6)$$

Portanto,  $y(x) = x^m$  será solução da equação (1) e somente se  $m$  é raiz da equação (6). A solução da equação (6) é dada por:

$$m = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \quad (7)$$

Assim, dependendo dos valores dos coeficientes  $a$  e  $b$ , podemos ter as seguintes soluções para  $m$ :

- 1) Raízes reais e distintas;
- 2) Raízes reais iguais;
- 3) Raízes complexas conjugadas.

Sabendo como determinar a equação auxiliar das equações lineares de 2ª ordem Euler-Cauchy, determine a solução geral dos itens abaixo:

- a)  $x^2 y'' - xy' + 5y = 0$ ;
- b)  $x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0$ ;
- c)  $x^2 y'' + 3xy' + 1.25y = 0$ ;
- d)  $x^2 \ddot{y} - x\dot{y} + y = 0$ .