Exercício 1

Demonstração

Temos que $|A| = m$ e $|B| = n$. Queremos mostrar que o número de funções de A em B é n^m. Vamos fazer indução em m.

Para $m = 1$, $A = \{x_1\}$ e $B = \{y_1, \dots, y_n\}$. Podemos enviar x_1 em y_i, $1 \leq i \leq n$. Logo, temos n possibilidades e, portanto, existem n funções entre A e B.

Suponhamos que, por hipótese de indução, entre $|A| = m$ e $|B| = n$ existam n^m funções. Consideremos A com $m+1$ elementos. Denotemos

$$A = \{x_1, \dots, x_{m+1}\} \text{ e } B = \{y_1, \dots, y_n\}.$$

Considere os conjuntos $A - \{x_1\}$ e B. Como $|A - \{x_1\}| = m$ e $|B| = n$, pela hipótese de indução, existem n^m funções entre A e B. Agora observe que para x_1 há n possibilidades de associá-lo a um elemento de B. Assim

Para cada função $f: A - \{x_1\} \to B$, criamos n funções de A em B. Logo existem $n^m \cdot n = n^{m+1}$ funções de A em B.

■

Exercício 2:

Primeiro, vamos conjecturar uma fórmula para a soma (1).

Se $n = 1$, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 1^3 = 1 = 1^2$

Se $n = 2$, $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = 3^2$

Se $n = 3$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 9 + 3^3 = 9 + 27 = 36 = 6^2$

Se $n = 4$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 36 + 4^3 = 100 = 10^2$

Se $n = 5$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 100 + 125 = 225 = 15^2$

Podemos então suspeitar que

$$1^3 + \ldots + n^3 = (\underbrace{1 + \ldots + n}) ^2 = \left(\frac{(n+1) \cdot n}{2}\right)^2$$

pois $1 + 2 + \ldots + n$ é a soma dos termos de uma PA de razão 1.

Agora, vamos provar, por indução, que tal fórmula é verdadeira

Para $n=1$,

$$1^3 = 1 = \left(\frac{(1+1)}{2}\cdot 1\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$$

Suponhamos que $1^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{(n+1)\,n}{2}\right]^2$, por hipótese de indução. Vamos provar que

$$1^3 + \dots + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right]^2$$

Note que

$$1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right]^2 + (n+1)^3 =$$

$$\frac{(n+1)^2\cdot n^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2 + 4(n+1)\right] =$$

$$\frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4n + 4\right) = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

Daí, pelo princípio de indução, segue a tese.

Exercício 3

(a) $9 \mid 10^n - 1$

Dem.:

Observe que

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (*)$$

Daí, $10^n - 1 = (10-1)\cdot(\underbrace{10^{n-1} + 10^{n-2}\cdot 1 + \dots + 10\cdot 1^{n-2} + 1^{n-1}}_{b \in \mathbb{Z}})$

Logo, $10^n - 1 = 9\cdot b$. Portanto,

$$9 \mid 10^n - 1$$

(b) $3 \mid 10^n - 7^n$

Dem.: Idem (a).

(c) $8 \mid 3^{2n} - 1$

Dem.:

Note que $3^{2n} - 1 = (3^2)^n - 1 = 9^n - 1^n$. Daí usando

(*) $$3^{2n} - 1 = (9-1)(\underbrace{9^{n-1} + 9^{n-2}1 + \dots 9.1^{n-2} + 1^{n-1}}_{b}) =$$

$= 8\cdot b$

Portanto, $8 \mid 3^{2n} - 1$

(d) $6 \mid 5^{2n+1} + 1$

Dem.

obs: Teorema (Binômio de Newton) - pág 39 (Polcino)

Sejam a e b inteiros e n inteiro positivo. Então

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i}$$

—— // ——

Note que $5^{2n+1} + 1 = (6-1)^{2n+1} + 1 =$

$$\left[\sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} (-1)^{2n+1-i} \, 6^{i} \right] + 1 =$$

$$\cancel{(-1)^{2n+1}} + \left[\sum_{i=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} (-1)^{2n+1-i} \, 6^{i} \right] + \cancel{1} =$$

$$6 \left[\sum_{i=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} (-1)^{2n+1-i} \, 6^{i-1} \right]$$

Logo $5^{2n+1} + 1$ é múltiplo de 6 e, portanto,

$6 \mid 5^{2n+1} + 1$.

(e) $5 \mid n^5 - n$

Dem:

Vamos fazer a demonstração por indução em n.

Para $n=0$, segue que $5 \mid 0$.

Suponhamos, por hipótese de indução que

$$5 \mid n^5 - n$$

Vamos provar a afirmação para $n+1$. Observe que

$(n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$. Daí, temos

$$(n+1)^5 - (n+1) = (n+1)^5 - n - 1 =$$

$$\left(n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + \cancel{1}\right) - n - \cancel{1} =$$

$$5\left(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n\right) + \left(n^5 - n\right)$$

Pela hipótese de indução,

$$5 \mid n^5 - n \Rightarrow n^5 - n = 5k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$(n+1)^5 - (n+1) = 5\left[n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + k\right].$$

Portanto, $5 \mid (n+1)^5 - (n+1)$ e segue a tese.

Exercício 4:

(a)

Demonstração:

($\Rightarrow$) Considere a par, então $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma

$$a^2 = a \cdot a = (2k)(2k) = 2(2k^2)$$

Donde segue que a^2 é par.

Para demonstrar a recíproca vamos usar a contrapositiva (i.e, $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$)

Assim, suponhamos que a seja ímpar, i.e

$$a = 2k+1$$

Daí,

$$a^2 = a \cdot a = (2k+1)(2k+1) = 4k^2 + 4k + 1 =$$

$$2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Logo a^2 é ímpar. $\blacksquare$

(b) Demonstração:

Queremos ver que não existem $\underset{\neq 0}{a}, b \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a^2 = 2b^2$$

Podemos considerar que $mdc(a,b)=1$, caso contrário se existir a e b basta dividi-los pelo $mdc(a,b)$.

Note que a^2 deve ser par. Pelo ex 4.a, a deve ser par. Assim, $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$a^2 = 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2. \quad (1)$$

Portanto, por (1), b^2 é par $\Rightarrow$ b par.

Com efeito, $b = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$. Contradição, pois consideramos $mdc(a,b)=1$.

Exercício 5:

(a) $F_1 + F_2 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}, \; \forall n \geq 1$

Demonstração:

Vamos proceder por indução em n. Para $n=1$

$$F_{2n-1} = F_1 = F_{2.1} = F_2 = 1$$

Suponhamos por hipótese de indução que

$$F_1 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Vamos provar que

$$F_1 + \ldots + F_{2n-1} + F_{2(n+1)-1} = F_{2(n+1)}$$

Temos que

$$F_1 + \ldots + F_{2n-1} + F_{2(n+1)-1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2} =$$

$$F_{2(n+1)}$$

Portanto, por indução, segue a tese.

(c) $F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^n, \; n \geq 1$

Demonstração:

Faremos indução em n.

Para $n=1$,

$$F_2^2 = 1 = \overset{1}{F_1} \cdot \overset{2}{F_3} - 1 = 2 - 1.$$

Suponha que $F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^n$. (H.I) Vamos provar a afirmação para $n+1$.

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1} \cdot F_{n+3} = F_{n+2}^2 - F_{n+1}\left(F_{n+1} + F_{n+2}\right) =$$

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 - F_{n+1} \cdot F_{n+2} =$$

$$-F_{n+1}^2 + F_{n+2}\left(\underbrace{F_{n+2} - F_{n+1}}_{F_n}\right) =$$

$$-F_{n+1}^2 + F_{n+2} \cdot F_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

Daí, por indução, segue a tese. $\blacksquare$

(b) $F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1}$, $n \geq 2$, $m \geq 1$

Demonstração:

Faremos a prova por indução em n.

Para $n=2$, temos que

$$F_{2+m} = \cancel{F_1}^{1} \cdot F_m + \cancel{F_2}^{1} F_{m+1} = F_m + F_{m+1}$$

Agora, suponha que seja válida a propriedade para $k = 2, 3, \ldots, n$. Vamos provar que vale para $n+1$.

Para n, temos que

$$F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1} \quad (1)$$

Para $n-1$, temos que

$$F_{(n-1)+m} = F_{(n-1)-1} \cdot F_m + F_{n-1} \cdot F_{m+1} \quad (2)$$

Somando (1) e (2), segue que:

$$F_{(n+m)-1} + F_{n+m} = \left(F_{(n-1)-1} + F_{n-1}\right) F_m + \left(F_{n-1} + F_n\right) F_{m+1} \Rightarrow$$

$$F_{n+m+1} = F_{n-1+1} F_m + F_{n+1} \cdot F_{m+1} \Rightarrow$$

$$F_{(n+1)+m} = F_{(n+1)-1} F_m + F_{n+1} \cdot F_{m+1}.$$

Então, pela 2ª forma de indução segue a tese.

Exercício 6:

Demonstração:

Temos que $p_1, \dots, p_k$ são inteiros positivos, $p_i > 1$

Além disso,

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$$

obs: Proposição: Se $a \mid c+d$ e $a \mid c$ então $a \mid d$.

Dem.:

Se $a \mid c+d$ então $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(c+d) = ak \quad (1)$$

Agora, como $a \mid c$, então $\exists\, l \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = al \quad (2)$$

Por (1) e (2), vem que

$$al + d = ak \Rightarrow d = a(\underbrace{k-l}_{\in \mathbb{Z}})$$

Portanto, $a \mid d$.

—— // ——

Observe que se $p_i \mid n$, $1 \leq i \leq k$, então como

$p_i \mid p_1 \cdots p_k$, usando a proposição, $p_i \mid 1$, contradição

■

Exercício 7:

(a) Demonstração:

Como $a \in P$ então $a \geq 0$ e $a \neq 0$. Analogamente,

$b \geq 0$ e $b \neq 0$. Daí, pelo axioma 14 (pág 19)

$$0 + b \leq a + b \Rightarrow b \leq a + b. \quad (1)$$

Usando o axioma 12 (Transitividade), como $0 \leq b$ e

$b \leq a + b$, obtemos que

$$0 \leq a + b. \quad (2)$$

Agora, vamos mostrar que $a + b \neq 0$. Suponhamos que

$a + b = 0 \Rightarrow a = -b$. Pela prop 1.2.5 (Prove)

$$-b \leq 0$$

Daí, $a \leq 0$ e $a \neq 0$, ou seja, $a < 0$, contradição.

Dessa forma, $a + b \in P$.

(b) Demonstração:

Seja $a \in P$, $b \in P$, então

$$\begin{cases} 0 \leq a \text{ e } a \neq 0 \\ 0 \leq b \text{ e } b \neq 0 \end{cases}$$

Pelo axioma 15,

$$0 \cdot b \leq a \cdot b \Rightarrow 0 \leq ab$$

Vamos provar que $ab \neq 0$. Se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$, contradição.

(c) Demonstração:

Pelo axioma A.13, dados dois inteiros a, b, tem-se que ou $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$. Tome $b = 0$ então ou

$$a < 0 \text{ ou } a = 0 \text{ ou } 0 < a.$$

Assim segue que $a = 0$ ou $a \in P$ ou $-a \in P$.

Exercício 8:

Demonstração

Temos que $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfaz

1. $f(1) = 1$
2. $f(a+b) = f(a) + f(b)$, para quaisquer a e $b \in \mathbb{Z}$.

Vamos mostrar que $f(0) = 0$. Note que

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow$$

$f(0) = 0$

Agora, vamos mostrar que para $a \in \mathbb{Z}$

$$f(-a) = -f(a) \quad (*)$$

De fato,

$$0 = f(0) = f(a + (-a)) = f(a) + f(-a) \Rightarrow$$

$f(-a) = -f(a)$

Por fim, vamos provar por indução que

$$f(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Já provamos no caso $n = 0$.

Suponhamos que $f(n) = n$ por hipotese de indução

Vamos provar para $n+1$

$$f(n+1) = f(n) + f(1) \overset{HI}{=} n+1.$$

Daí, usando (*) podemos concluir que

$$f(z) = z, \quad \forall z \in \mathbb{Z}.$$

$\blacksquare$