Monitoria



Ex (ii) $123X + 360Y = 99$

obs/ Teo. de Bezout: Se $d = mdc(a, b)$, $\exists r, s \in \mathbb{Z}$ tq $d = ar + bs$

Queremos encontrar $mdc(360, 123)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | 12 | 1 | 2 |
| 360 \| | 123 | 114 | 9 | 6 | 3 |
| 114 \| | 9 | 6 | 3 | 0 | |

$\Rightarrow mdc(360, 123) = 3.$

$3 = 9 - 6 = 9 - (114 - 9 \cdot 12) = -114 + 13 \cdot 9 =$

$-114 + 13(123 - 114) = -14 \cdot 114 + 13 \cdot 123 =$

$-14 \cdot (360 - 123 \cdot 2) + 13 \cdot 123 = (-14) \cdot 360 + 41 \cdot 123$

Descobrimos que $s = -14$, $r = 41$.

$$x_0 = r \cdot \frac{c}{d} = 41 \cdot \frac{99}{3} = 1353$$

$$y_0 = s \cdot \frac{c}{d} = -14 \cdot \frac{99}{3} = -462$$

Solução Geral:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$x = x_0 + \frac{360}{3}t, \quad y = y_0 - \frac{123}{3}t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

3) Note que queremos $z < 1000$ $(z \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} z = 37x + 9 \\ z = 52y + 15 \end{cases} \Rightarrow 37x + 9 = 52y + 15 \Rightarrow$$

$$37x + (-52)y = 6 \quad \text{(eq. diofantina)}$$

Queremos $mdc(37, -52) = mdc(52, 37)$

| | 1 | 2 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 52 \| | 37 | 15 | 7 | 1 |
| 15 \| | 7 | 1 | 0 | |

$\Rightarrow mdc(52, 37) = 1$

$$1 = 15 - 7 \cdot 2 = 15 - 2 \cdot (37 - 2 \cdot 15) = -2 \cdot 37 + 5 \cdot 15 =$$

$$-2 \cdot 37 + 5(52 - 37) = 5 \cdot 52 - 7 \cdot 37 \Rightarrow r = -7, \; s = -5$$

A solução particular é:

$$x_0 = -7 \cdot \frac{6}{1} = -42, \quad y_0 = -5 \cdot \frac{6}{1} = -30$$

A solução geral é:

$$\rightarrow x = x_0 - \frac{52}{1} t, \quad y = y_0 - \frac{37}{1} t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$z \in \mathbb{N}, \; z < 1000 \Rightarrow \quad 0 \leq z < 1000 \Rightarrow$$

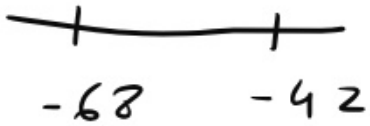
$$0 \leq 37x + 9 < 1000 \Rightarrow \quad -9 \leq 37x < 991 \Rightarrow$$

$$0 \leq x \leq 26$$

$$0 \leq -42 - 52t \leq 26 \Rightarrow \; 42 \leq -52t \leq 68 \Rightarrow$$

$42 \leq -5zt \leq 68 \Rightarrow -42 \geq 5zt \geq -68 \Rightarrow$

$t = -1$




Doc, $x = x_0 - 5z(-1) = -42 + 5z = 10$

$y = 37x + 9 = 37 \cdot 10 + 9 = 379$

ex 2) $11x + 9y = 270$

Encontremos $mdc(11, 9) = 1$. Pelo algoritmo de Euclides

| | 1 | 4 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 9 | 2 | 1 | ← |
| 2 | 1 | 0 | | |

$$1 = 9 - 2 \cdot 4 = 9 - 4(11 - 9) = \underbrace{5}_{s} \cdot 9 - \underbrace{4}_{r} 11$$

$(r = -4,\ s = 5)$

Assim, a solução particular é:

$$x_0 = -4 \cdot \frac{270}{1} = -1080 \ , \ y_0 = 5 \cdot 270 = 1350$$

A solução geral é: $(\widehat{11x + 9y = 270})$

$x = x_0 + \frac{9}{1}t$, $y = y_0 - \frac{11}{1}t \Rightarrow$

$x = \underbrace{-1080 + 9t}_{(1)}$, $y = \underbrace{1350 - 11t}_{(2)}$, $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} -1080 + 9t \geq 0 \Rightarrow 9t \geq 1080 \Rightarrow t \geq 120 \\ 1350 - 11t \geq 0 \Rightarrow 11t \leq 1350 \Rightarrow t \leq 122 \end{cases}$$

$120 \leq t \leq 122$. Agora, substitua os t's em (1) e (2), encontrando $x_1, x_2, x_3$, $y_1, y_2, y_3$, donde o resultado é $11 \cdot x_i$ e $9 \cdot y_i$, $i = 1, 2, 3$

a) $x$ - reais $(100x)$ } (original)

$y$ - centavos

Então, o valor original do cheque é $100x + y$.

Como reais e centavos foram trocados temos que:

$$100y + x - 68 = 2(100x + y) \Rightarrow$$

$$-199x + 98y = 68 //$$

Vamos encontrar $mdc(-199, 98) = mdc(199, 98)$

| | 2 | 32 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 199 | 98 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | |

$mdc(199, 98) = 1$.

$1 = 3 - 2 = 3 - (98 - 3 \cdot 32) = -98 + 33 \cdot 3 =$

$-98 + 33(199 - 2 \cdot 98) =$

$-33 \cdot (199) - 67 \cdot 98 \quad (-199x + 98y = 68)$

$r = -33$ e $s = -67$

As soluções particulares são:

$x_0 = -33 \cdot 68$, $y_0 = -67 \cdot 68$

A solução geral é:

$$x = x_0 + 98t, \quad y = y_0 + 199t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Agora, substitua $x$ e $y$ acima em

$$100x + y$$

Então, encontraremos uma expressão em função de $t$. (**)

(*) $0 < 100x + y$ (em função de $t$).

De (*), encontramos uma condição para $t$.

Agora, basta analisar em (**) quais dentre os possíveis $t$ satisfazem o ex.

Ex 4) Sabemos que $17 \mid 2x + 3y$. Queremos $17 \mid 9x + 5y$.

Dicas:

1) $a \mid b \Rightarrow a \mid rb$, $a, b, r \in \mathbb{Z}$

2) Prop: $a \mid b + c$ e $a \mid b \Rightarrow a \mid c$.

3) lema: Se $p$ é um primo e $a, b \in \mathbb{Z}$ então $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$.