MAE5776

ANÁLISE MULTIVARIADA

Júlia M Pavan Soler

pavan@ime.usp.br

1º Sem/2020 - IME

Análise Multivariada

$$Y_{n\times p} = \left(Y_{ij}\right) \in \Re^{n\times p}$$

Já vimos ☺

Matriz de Dados: Estatísticas descritivas multivariadas em $\Re^{p}$, $\Re^{p\times p}$ e $\Re^{n\times n}$

Episóides de Concentração (Diagnóstico de outliers), Boxplot Bivariado

Matriz Aleatória: Distribuição Normal Multivariada, Distribuições Amostrais

Testes de Hipóteses Multivariadas para μ e Σ:

Caso de Uma, Duas e Muitas Populações N_p (MANOVA)

Regiões de Confiança, I.C. Simultâneos, Correções para Múltiplos testes

Decomposições:
$SS_T = SS_B + SS_W$

Técnicas de Redução de Dimensionalidade: $\Re^{p} \rightarrow \Re^{m}; \quad m \leq p$

Observações *iid* : *Caso n>p* (soluções clássicas)

Caso n<<p (Big-p)

Caso n>>p (Big-n)

Observações estruturadas (correlacionadas): Estudos de base Familiar

Redução de Dimensionalidade em $\Re^p$

	Variáveis					
Unidades Amostrais	1	2	…	j	…	p
1	Y_{11}	Y_{12}		Y_{1j}		Y_{1p}
2	Y_{21}	Y_{22}		Y_{2j}		Y_{2p}
…	…	…	…	…		…
i	Y_{i1}	Y_{i2}		Y_{ij}		Y_{ip}
…	…	…	…	…	…	…
n	Y_{n1}	Y_{n2}		Y_{nj}		Y_{np}

$$Y_{n\times p};\quad n > p$$

$$Y_{ig_{p\times 1}} \sim \left(\mu_g;\Sigma_g\right)\ \ \Re^p \rightarrow \Re^m, m < p$$

Como veremos, a Redução de Dimensionalidade depende da **estrutura dos dados**!

Estrutura dos Dados:

$\mu_{g_{p\times 1}}$?

$\mu_g = \mu$

$\Sigma_{g_{p\times p}}$?

$\Sigma_g = \Sigma$

$i = 1,...,n_g;\ \ g = 1,...,G$?

iid

Redução de Dimensionalidade em $\Re^p$
Quociente de Rayleigh

Seja M uma matriz simétrica em $\Re^{pxp}$, com autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \lambda_p$ e os correspondentes autovetores $V_1, V_2, ..., V_p$. Então:

$$\max_{\|a\|=1} a'Ma = \max_{a \neq 0} \frac{a'Ma}{a'a} = \lambda_1; \quad a = V_1 \in \Re^p$$

$$\min_{\|a\|=1} a'Ma = \min_{a \neq 0} \frac{a'Ma}{a'a} = \lambda_p; \quad a = V_p \in \Re^p$$

A redução de dimensionalidade pode ser formulada como um problema de otimização de formas quadráticas, cuja solução está na teoria de decomposição espectral de matrizes simétricas $\Re^{pxp}$.

Veremos equivalências de soluções nos espaços Duais: $\Re^{pxp}$, $\Re^{nxn}$ e $\Re^{nxp}$.

Ténicas Multivariadas de Redução de Dimensionalidade

Como obter vetores reducionistas dos dados?

- Análise de Componentes Principais: $Y_{n\times p} \Rightarrow \Sigma_{p\times p}$
- Escalonamento Multidimensional: $Y_{n\times p} \Rightarrow D_{n\times n}$
- Análise de Correspondência: $Y_{I\times J} \in [0,1]^{I\times J}$; $D_{I\times I}$; $D_{J\times J}$
- Análise Fatorial: $Y_{n\times p} \Rightarrow \Sigma_{p\times p}$
- Análise Discriminante (MANOVA): $Y_{n\times(p+1)} \Rightarrow \Sigma_{T\ p\times p} = \Sigma_{B\ p\times p} + \Sigma_{W\ p\times p}$
- Análise de Agrupamento: $Y_{n\times p} \Rightarrow D_{n\times n}$
- Análise de Correlação Canônica: $Y_{n\times(p+q)} \Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{p\times p} & \Sigma_{p\times q} \\ \Sigma_{q\times p} & \Sigma_{q\times q} \end{pmatrix}$

✓ Objetivo da análise
✓ Estrutura dos Dados
✓ Soluções (e Restrições impostas)
✓ Representação Gráfica dos dados: BiPlot, Dendrograma, HeatMap

Análise de Componentes Principais

Análise Clássica

n > p
Observações iid
(respostas quantitativas)

Análise de Componentes Principais

(Pearson, 1901)

	Variáveis					
Unidades Amostrais	1	2	…	j	…	p
1	Y_{11}	Y_{12}		Y_{1j}		Y_{1p}
2	Y_{21}	Y_{22}		Y_{2j}		Y_{2p}
…	…	…	…	…		…
i	Y_{i1}	Y_{i2}		Y_{ij}		Y_{ip}
…	…	…	…	…	…	…
n	Y_{n1}	Y_{n2}		Y_{nj}		Y_{np}

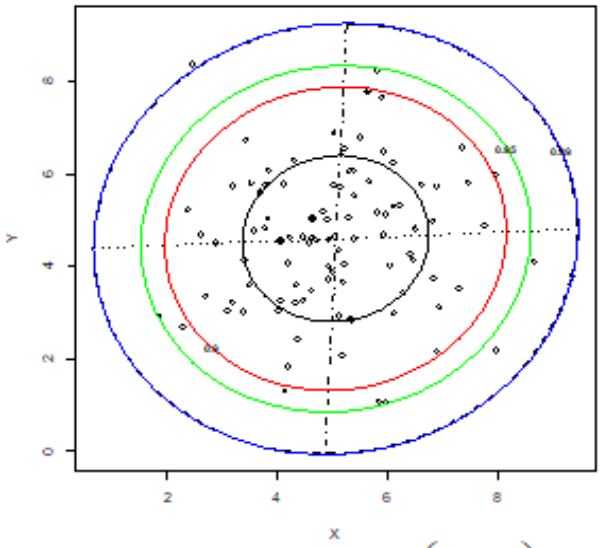
$$Y_{n\times p};\quad n > p \Rightarrow Y_{i_{p\times 1}} \overset{iid}{\sim} (\mu;\Sigma)$$

Premissa: Dados de Uma única População
Observações *iid*
Matriz de covariâncias "válida" ($\Sigma \in \Re^{pxp}$)

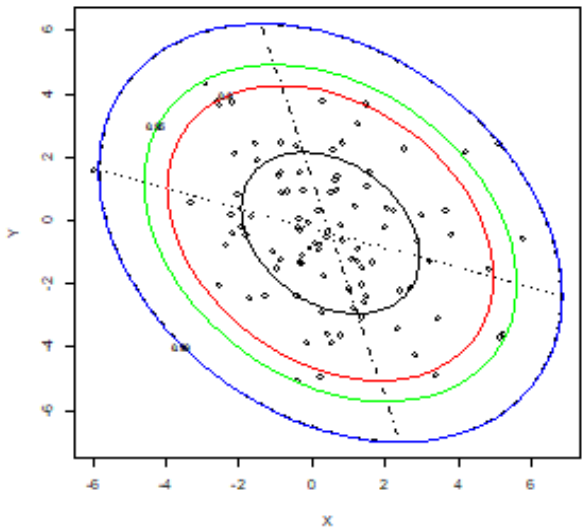
- A variável Y_j pode ser eliminada da análise?
- Como as variáveis podem ser ordenadas segundo sua "importância" na análise?

Considerar a estrutura de Σ

$$\mu' = (5,5) \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

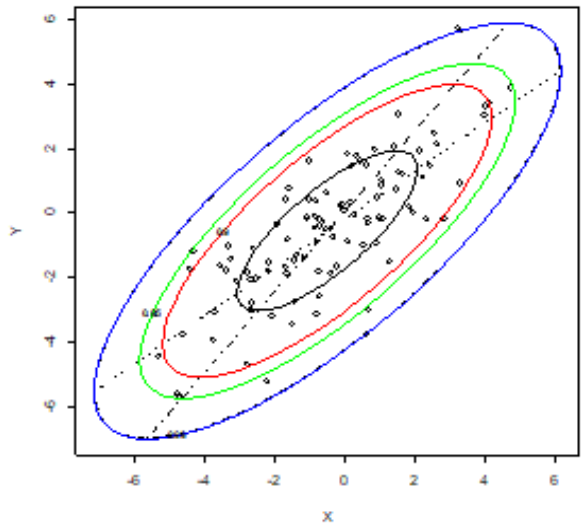


$$\mu' = (0, 0) \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

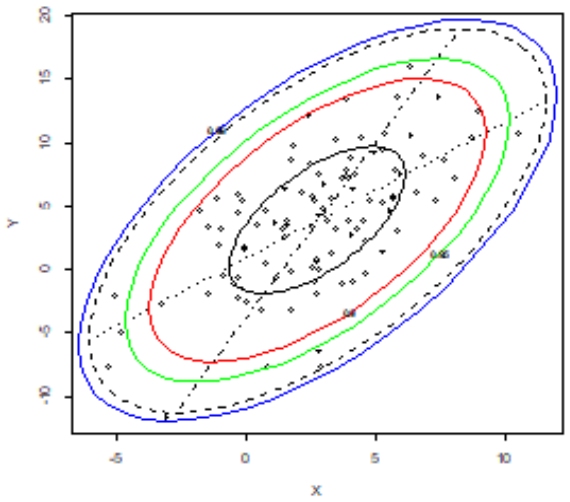


BoxPlot Bivariado
(bivbox-R)

$$\mu' = (0, 0) \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$\mu' = (3, 4) \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$$



Como são as correspondentes elipses para as variáveis padronizadas?

$\Sigma \quad \Leftrightarrow \quad R$

Análise de Componentes Principais
Estruturas de Σ e R

Como proceder com a redução de dimensionalidade nos seguintes casos?

Estrutura apropriada para a redução: ordenar as variáveis de acordo com a variância e calcular a contribuição para a variância total.

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{pp} \end{pmatrix}; \qquad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Não há como reduzir a dimensionalidade de espaços formados por variáveis não correlacionadas e homocedásticas

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix}; \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix} = (1-\rho) I_p + \rho 1_p 1_p'$$

Correlação uniforme.
Se ρ for alto, um único CP deve explicar bem a (co)variância dos dados e ele é uma média ponderada que atribui pesos iguais à todas as variáveis.

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \sim & & \dots & \dots \\ & & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}; \qquad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ \sim & & \dots & \dots \\ & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Dados Nutricionais

	energia	proteina	gordura	calcio	ferro
[1,]	340	20	28	9	2.6
[2,]	245	21	17	9	2.7
[3,]	420	15	39	7	2.0
[4,]	375	19	32	9	2.5
[5,]	180	22	10	17	3.7
[6,]	115	20	3	8	1.4
[7,]	170	25	7	12	1.5
[8,]	160	26	5	14	5.9
[9,]	265	20	20	9	2.6
[10,]	300	18	25	9	2.3
[11,]	340	20	28	9	2.5
[12,]	340	19	29	9	2.5
[13,]	355	19	30	9	2.4
[14,]	205	18	14	7	2.5
[15,]	185	23	9	9	2.7
[16,]	135	22	4	25	0.6
[17,]	70	11	1	82	6.0
[18,]	45	7	1	74	5.4
[19,]	90	14	2	38	0.8
[20,]	135	16	5	15	0.5
[21,]	200	19	13	5	1.0
[22,]	155	16	9	157	1.8
[23,]	195	16	11	14	1.3
[24,]	120	17	5	159	0.7
[25,]	180	22	9	367	2.5
[26,]	170	25	7	7	1.2
[27,]	110	23	1	98	2.6

Caracterização nutricional de 27 produtos alimentícios (Everitt, 2007)

Centróide:

energia	proteína	gordura	cálcio	ferro
207.41	19.00	13.48	43.96	2.38

Matriz de covariância (S)

10243.02	74.81	1124.57	-2530.29	-14.75
74.81	18.08	1.19	-28.23	-1.08
1124.57	1.19	126.72	-270.67	-1.00
-2530.29	-28.23	-270.67	6089.34	5.05
-14.75	-1.08	-1.00	5.05	2.13

Matriz de correlação (R)

1.00	0.17	0.99	-0.32	-0.10
0.17	1.00	0.02	-0.09	-0.17
0.99	0.02	1.00	-0.31	-0.06
-0.32	-0.09	-0.31	1.00	0.04
-0.10	-0.17	-0.06	0.04	1.00

R sugere um padrão não estruturado de correlação entre as variáveis

Dados dos Cães Pré-históricos

Centróide

X1	X2	X3	X4	X5	X6
10.48571	22.50000	21.51429	8.50000	34.22857	39.68571

Matriz de Covariância

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	2.881429	5.251667	4.846905	1.933333	6.527143	7.739762
X2	5.251667	10.556667	8.895000	3.593333	11.456667	15.583333
X3	4.846905	8.895000	9.611429	3.508333	13.427857	16.305238
X4	1.933333	3.593333	3.508333	1.356667	4.863333	5.920000
X5	6.527143	11.456667	13.427857	4.863333	24.362381	24.680476
X6	7.739762	15.583333	16.305238	5.920000	24.680476	31.518095

Sugere um padrão de correlação uniforme

Matriz de Correlação

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	1.0000000	0.9522036	0.9210148	0.9778365	0.7790392	0.8121639
X2	0.9522036	1.0000000	0.8830567	0.9495056	0.7143894	0.8543129
X3	0.9210148	0.8830567	1.0000000	0.9715615	0.8775116	0.9368136
X4	0.9778365	0.9495056	0.9715615	1.0000000	0.8459362	0.9053263
X5	0.7790392	0.7143894	0.8775116	0.8459362	1.0000000	0.8906636
X6	0.8121639	0.8543129	0.9368136	0.9053263	0.8906636	1.0000000

Análise de Componentes Principais

$$Y_i \in \Re^p \quad \rightarrow \quad Z_i = A_{p\times p}\, Y_{i_{p\times 1}} \in \Re^p$$

$$Cov(Y_i) = \Sigma_{p\times p} \qquad Cov(Z_i) = \Lambda = Diag(\lambda_j)$$

$$tr\,\Sigma = tr\Lambda$$ Preservar a variância total

Realizar uma transformação linear de Y que preserve a variância total

Obter a **decomposição spectral de Σ**, em seus autovalores (λ_j) e autovetores (P_j).

Decomposição espectral

$$\left|\Sigma - \lambda I_p\right| = 0; \quad \Sigma P_j = \lambda_j P_j \qquad \Sigma = P\Lambda P' \quad ; \quad PP' = P'P = I \quad \Lambda = diag(\lambda_j)$$

$$tr\,\Sigma = tr\left(P\Lambda P'\right) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j P_j{}' P_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = tr\Lambda$$

$$\rightarrow \quad A = P'; \quad Z_{ij} = P_j'\, Y_{i_{p\times 1}} \in \Re$$

Aproximação para Σ ($\in \Re^{pxp}$) em $\Re^{mxm}$ (p<m)

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j P_j P_j{}' \cong \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j P_j{}';$$

$$Z_i = \begin{pmatrix} Z_{i1} \\ \dots \\ Z_{im} \end{pmatrix} = P'_{m\times p}\, Y_{i_{p\times 1}} \in \Re^m$$

Equivalente ao problema de otimização:

Var(a'Y)

$$\arg\max_{\|a\|=1} \frac{a'\Sigma a}{a'a} = P_1; \quad \max \frac{P_1'\Sigma P_1}{P_1'P_1} = \lambda_1; \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq \dots \geq \lambda_p$$

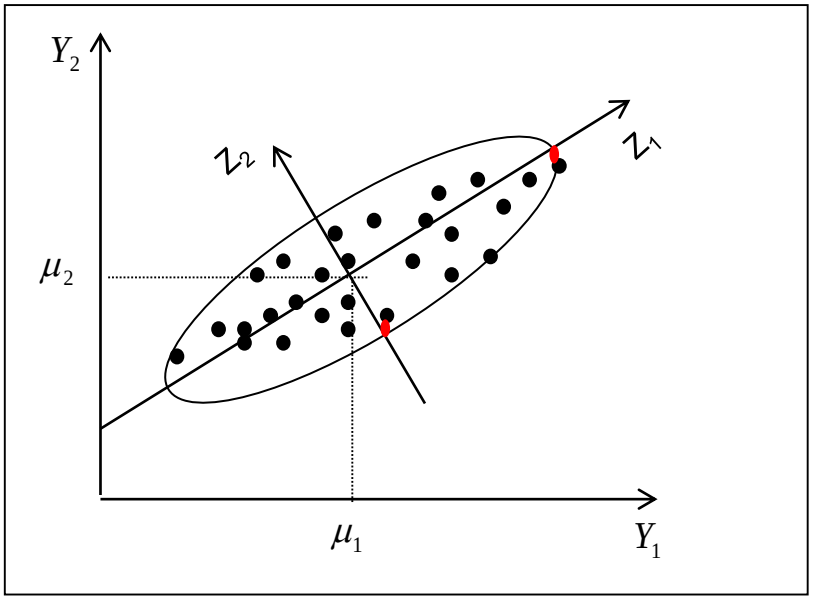
$$Y_i \in \Re^p \rightarrow Z_i = P'_{m\times p}\, Y_{i_{p\times 1}} \in \Re^m \quad \Rightarrow Z_{ki} = P_k'\, Y_{p\times 1}; \quad Var(Z_{ki}) = \lambda_k$$

Análise de Componentes Principais

Técnica de Redução Linear de Dimensionalidade de Variáveis

$(y-\bar{y})' \Sigma^{-1} (y-\bar{y}) = c^2$ define

uma família de elipsóides



Transformação que preserva a variância total (Rotação ortogonal dos Eixos)

$$Y \quad \Rightarrow Z = AY$$

$$(y_1, y_2) \Rightarrow (z_1, z_2)$$

Z_1: primeiro componente principal

Z_2: segundo componente principal

$$Z_1 = a_1' Y \; ; \quad V(a_1' Y) = a_1' \Sigma \, a_1$$

$$Z_2 = a_2' Y \; ; \quad V(a_2' Y) = a_2' \Sigma \, a_2$$

$$V(a_1' Y) \geq V(a_2' Y)$$

$$Cov(Z_1, Z_2) = a_1' \Sigma \, a_2 = 0$$

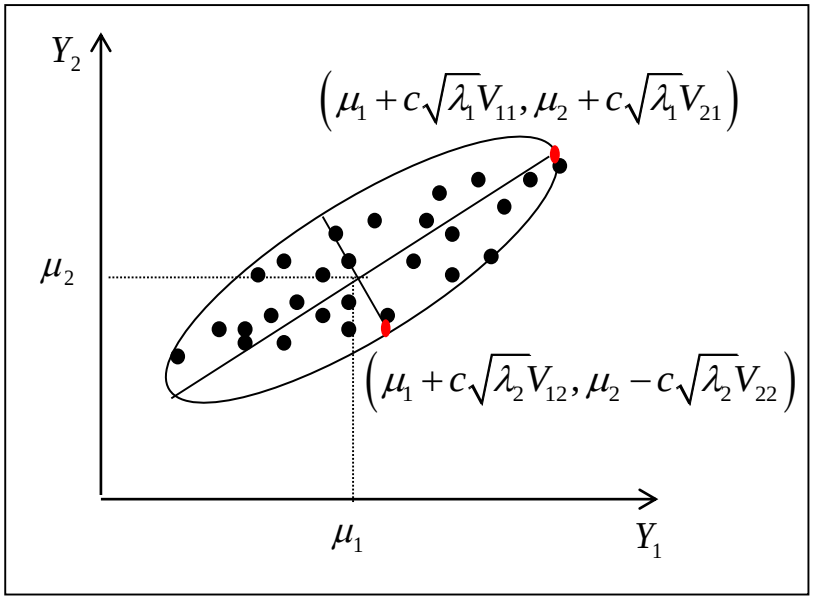
Decomposição espectral de Σ (autovalores e autovetores) permite uma representação dos dados em eixos ortogonais e nas direções de máxima variação (total) dos dados.

Decomposição Espectral de Σ e a Elipse de Concentração de Observações

Exemplo da Normal bivariada:

$$\mathbf{Y}_{2\times1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_{2\times2} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\right); \qquad \sigma_{11} = \sigma_{22}$$

Elipse de Concentração de observações



$$d_M^2 \sim \chi_2^2 \quad \Rightarrow \quad P\left(d_M^2 \le c^2\right) \le (1-\alpha)$$

Obter *c* para a inclusão de 90%, 95% e 98% dos pontos amostrais.

Os eixos da elipse de concentração são calculados pela decomposição espectral de Σ:

$$\left|\Sigma - \lambda I_2\right| = 0 \qquad \text{autovalores}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12} \qquad \lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$$

$$\Sigma V_j = \lambda_j V_j \qquad \text{autovetores}$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad V_j' V_j = 1 \qquad V_j' V_{j'} = 0$$

Revise os seguintes resultados:

Análise de Componentes Principais

Exemplo 1: $\Sigma = \sigma^2 I$; $\Sigma = P\Lambda P' \Rightarrow P = I; \quad \Sigma P_j = \sigma^2 P_j$

σ^2 é autovalor com multiplicidade p.

$$Z_{ji} = P_j' Y_i = Y_{ij}$$

Não é possível reduzir nem ordenar as variáveis.

Exemplo 2: $\Sigma = diag(\sigma_{jj})$; $\Sigma = P\Lambda P' \Rightarrow P = I; \quad \Sigma P_j = \sigma_{jj} P_j$

$$Z_{ji} = P_j' Y_i = Y_{i(j)}; \quad (\sigma_{jj}; P_j)$$

Os CP são as variáveis originais ordenadas.

Exemplo 3: $\Sigma = (1-\rho)I + \rho 11'; \rho > 0$; $\Sigma = P\Lambda P' \Rightarrow \lambda_1 = 1+(p-1)\rho; \quad P_1 = 1/\sqrt{p}1_p$

$$\lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 1-\rho$$

$$Z_{1i} = P_1' Y_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{Y_{ij}}{\sqrt{p}}$$

CP1 é um “índice” com pesos iguais, e de norma 1, para todas as variáveis

$$\%VarExpl = \frac{\lambda_1}{p} = \frac{1+(p-1)\rho}{p} = \rho + \frac{1-\rho}{p} \cong \rho \text{ se } \rho \to 1 \text{ ou } p \to \infty$$

Componentes Principais
Quantos Componentes Reter na Análise?

$$Y_i \in \Re^p \quad \rightarrow \quad Z_i = V'_{m\times p}\, Y_{i_{p\times 1}} \in \Re^m \qquad m?$$

- Preservar "grande" parte da variância total dos dados:

Para variáveis padronizadas: $\lambda_j \geq 1$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_m}{tr\Sigma} \geq ? \quad (0{,}70)$$

Devem ser retidos todos os CPj, com variância maior que a média:

$$\lambda_j \geq \frac{tr\Sigma}{p}$$

Critério de corte no *ScreePlot*: quando a variação entre os autovalores (λ) passa a ser pequena (*cotovelo do gráfico*)

- Garantir Correlações "Altas" entre as variáveis Originais e as CP

Revise as formulas dessas correlações (r)!

- Garantir que "grande" parte da variabilidade de cada variável original seja explicada pelos CP

$= r^2$

$$r_{jk} = Cor\left(Y_j, Z_k\right) = \frac{a_{jk}\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\sigma_{jj}}}$$

a_{jk} é a coordenada j do autovetor k

Análise de Componentes Principais

Obtenção dos Componentes Principais dos Dados Nutricionais

Decomposição Espectral da Matriz de Covariância S:

Autovalores de S

```
11552.53  4903.92    20.43     2.07     0.35
```

Autovetores de S

Cargas (pesos) das variáveis no PC1

```
          V1    V2     V3     V4     V5
[1,]  0.90  0.42 -0.03 -0.01  0.10
[2,]  0.01  0.00 -0.92  0.10 -0.37
[3,]  0.10  0.05  0.37  0.09 -0.92
[4,] -0.42  0.91  0.00  0.00  0.00
[5,]  0.00  0.00  0.06  0.99  0.12
```

$$tr\ S = 16479.3 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = tr\,\Lambda$$

$$PC1 = Z_1 = YV_1$$

$$PC2 = Z_2 = YV_2$$

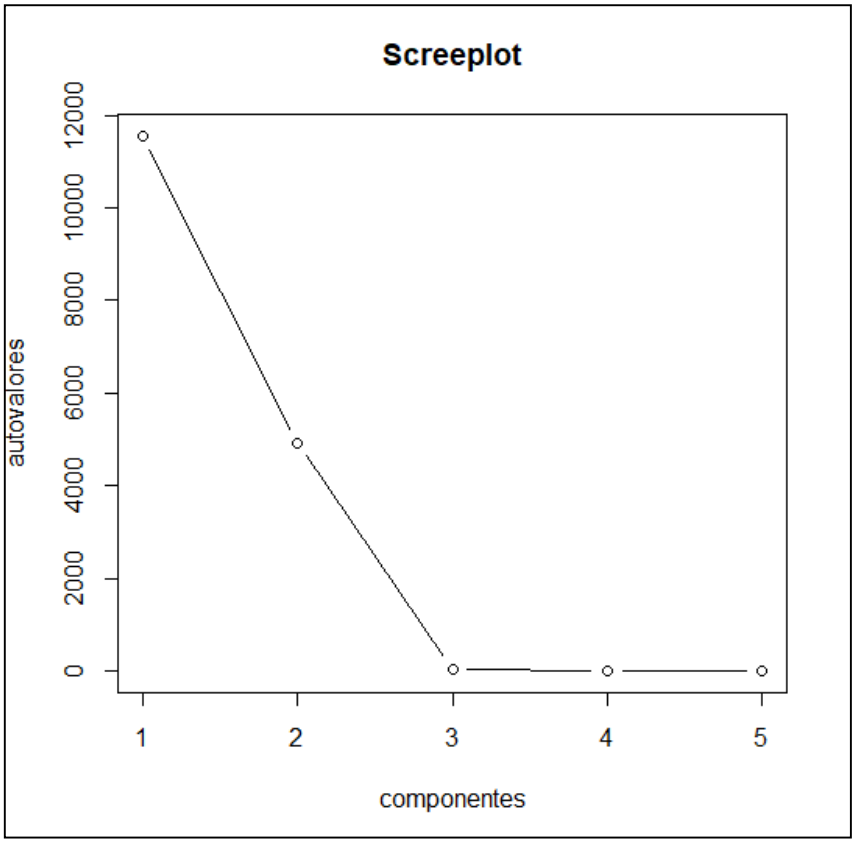
Importância dos Componentes Principais:

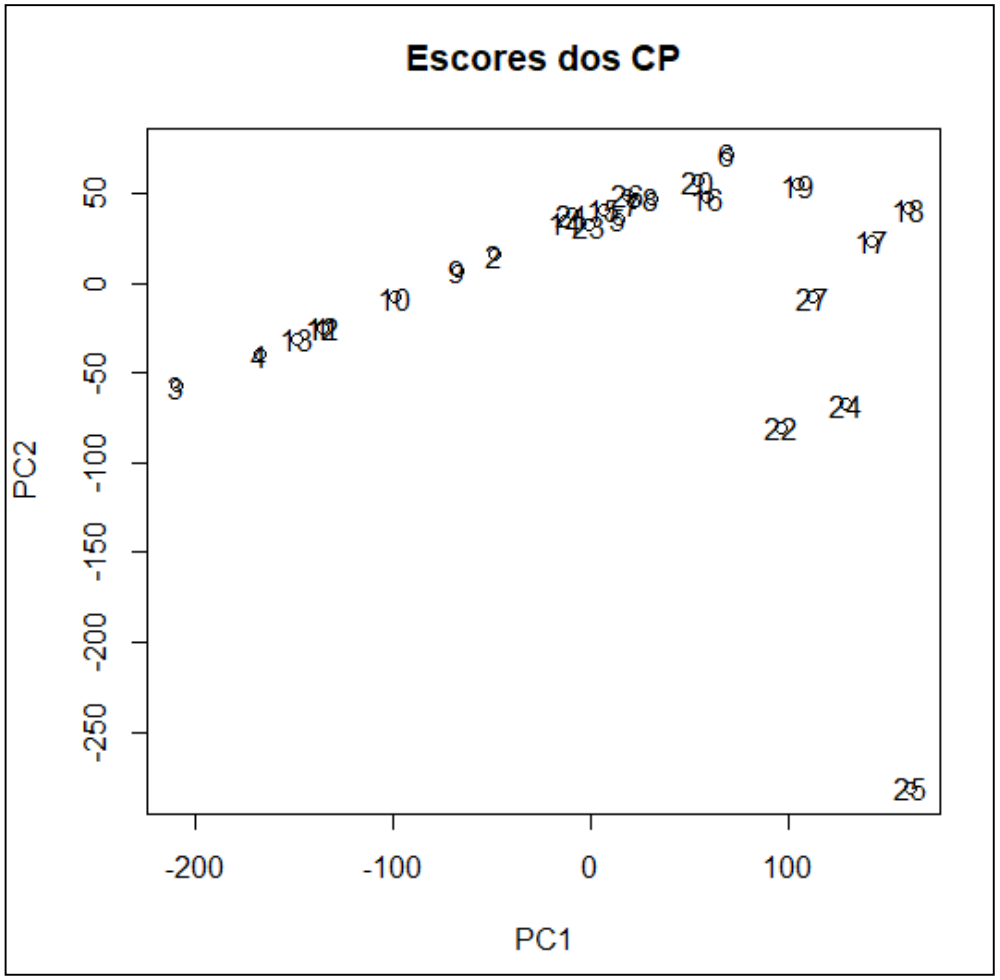
√11552.53

```
                          PC1      PC2      PC3      PC4      PC5
Standard deviation     107.483 70.0280 4.51941 1.43767 0.59303
Proportion of Variance   0.701  0.2976 0.00124 0.00013 0.00002
Cumulative Proportion    0.701  0.9986 0.99985 0.99998 1.00000
```

Análise de Componentes Principais

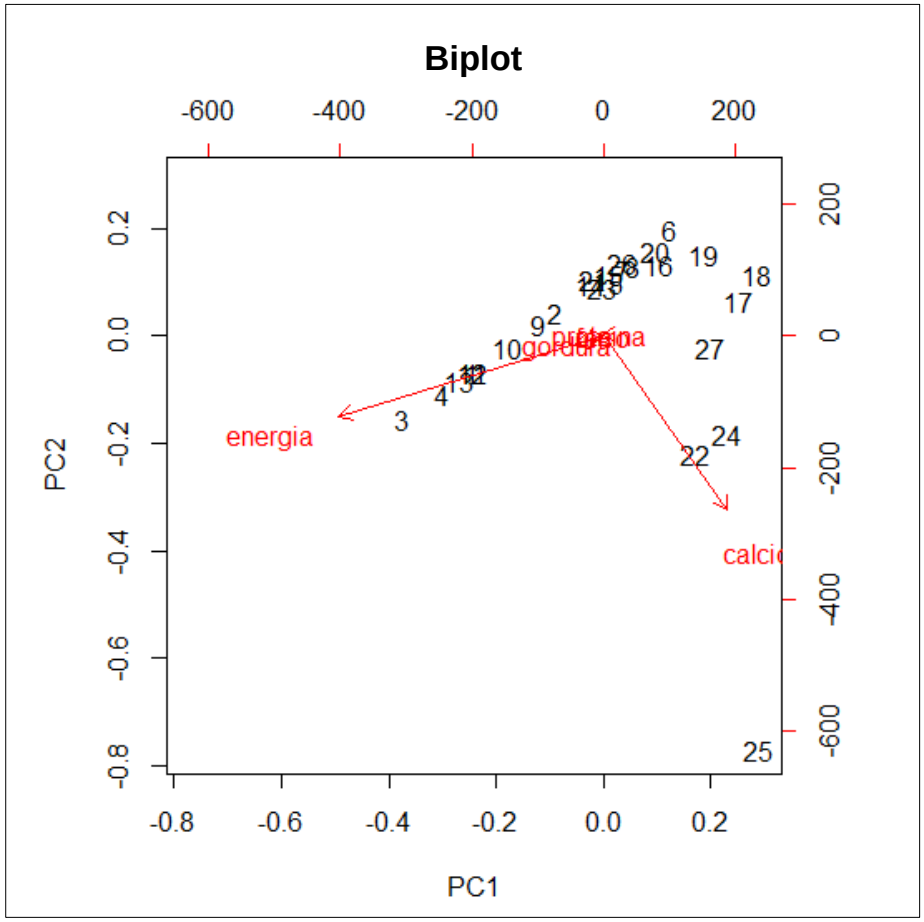
Dados Nutricionais (n=27; p=5)





Análise de Componentes Principais

Dados Nutricionais (n=27; p=5)



Biplot: Representação simultânea dos escores dos CP e dos pesos das variáveis

As variáveis Energia e Cálcio dominam a análise: atribuem os maiores pesos na combinação linear das variáveis

A observação 25 é atípica em relação às demais.

Dados Nutricionais e os Escores dos Dois Primeiros Componentes Principais

	energia	proteina	gordura	calcio	ferro	PC1	PC2
[1,]	340	20	28	9	2.6	-135.68	-24.63
[2,]	245	21	17	9	2.7	-49.00	15.75
[3,]	420	15	39	7	2.0	-209.66	-56.90
[4,]	375	19	32	9	2.5	-167.60	-39.51
[5,]	180	22	10	17	3.7	13.64	36.10
[6,]	115	20	3	8	1.4	69.11	71.87
[7,]	170	25	7	12	1.5	20.81	44.97
[8,]	160	26	5	14	5.9	30.86	47.45
[9,]	265	20	20	9	2.6	-67.31	7.22
[10,]	300	18	25	9	2.3	-99.32	-7.70
[11,]	340	20	28	9	2.5	-135.68	-24.63
[12,]	340	19	29	9	2.5	-135.77	-24.68
[13,]	355	19	30	9	2.4	-149.38	-31.02
[14,]	205	18	14	7	2.5	-13.48	34.49
[15,]	185	23	9	9	2.7	5.84	41.30
[16,]	135	22	4	25	0.6	58.15	48.02
[17,]	70	11	1	82	6.0	141.17	23.78
[18,]	45	7	1	74	5.4	160.34	41.52
[19,]	90	14	2	38	0.8	104.44	55.22
[20,]	135	16	5	15	0.5	53.87	57.04
[21,]	200	19	13	5	1.0	-9.73	38.45
[22,]	155	16	9	157	1.8	95.41	-80.26
[23,]	195	16	11	14	1.3	-1.21	32.49
[24,]	120	17	5	159	0.7	128.18	-67.20
[25,]	180	22	9	367	2.5	161.52	-281.12
[26,]	170	25	7	7	1.2	18.70	49.50
[27,]	110	23	1	98	2.6	111.79	-7.52

Calcular a correlação entre as variáveis originais e CP1 e CP2.

Calcular a variância de CP1 e CP2 (mostre que é os autovalores correspondentes).

Análise de Componentes Principais

Dados Nutricionais (n=27; p=5) : Redução para os 2 primeiros Componentes Principais (CP1 e CP2)

Matriz de correlação dos CP com as variáveis originais

	PC1	PC2
energia	-0.95693047	-0.29032625
proteina	-0.17411811	-0.01973317
gordura	-0.94229427	-0.29494848
calcio	0.58159624	-0.81346912
ferro	0.09893007	0.01624411

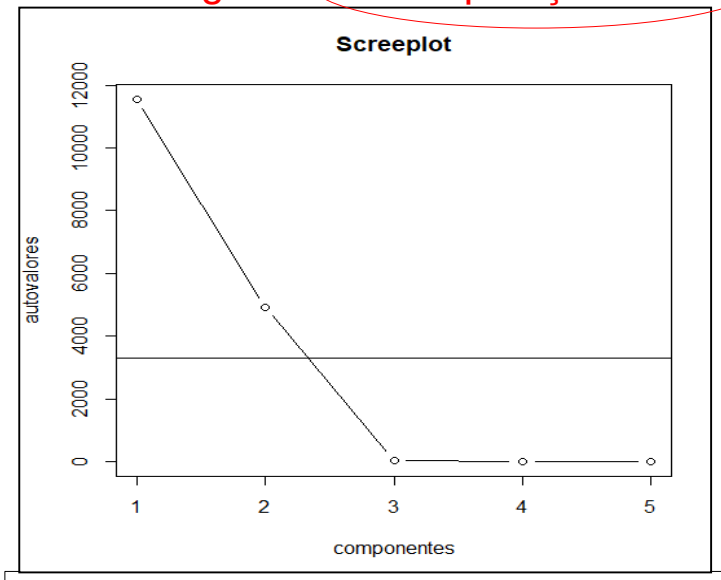
Proporção da variância das variáveis explicada pelos CP

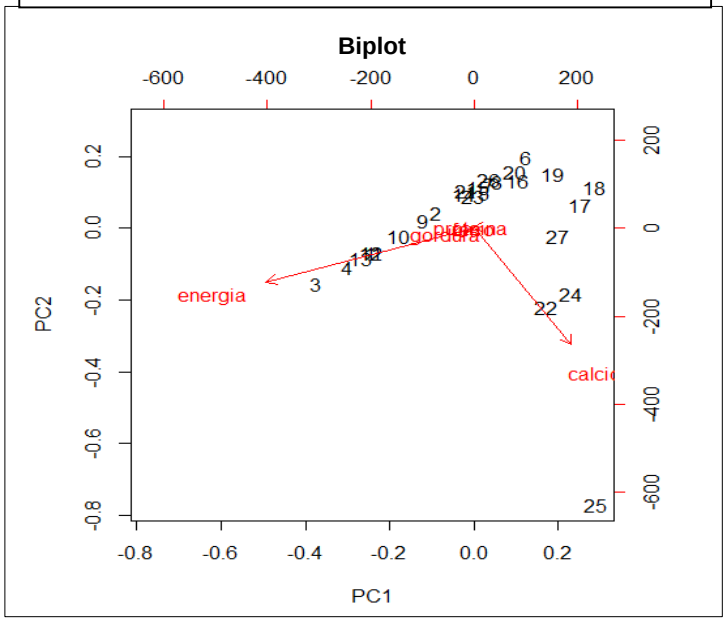
	PC1	PC2	variância
energia	0.915715932	0.0842893318	10243.019943
proteina	0.030317116	0.0003893978	18.076923
gordura	0.887918489	0.0869946033	126.720798
calcio	0.338254192	0.6617320111	6089.344729
ferro	0.009787159	0.0002638710	2.134103

Análise de Componentes Principais

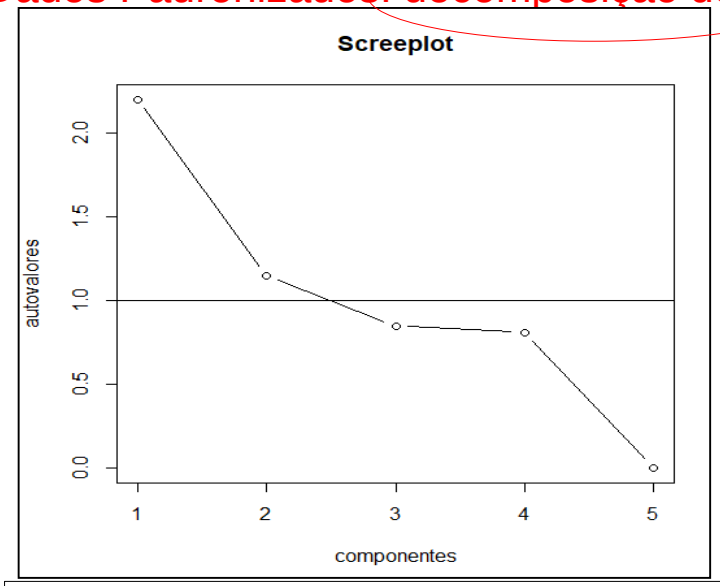
NÃO é invariante por padronização dos dados

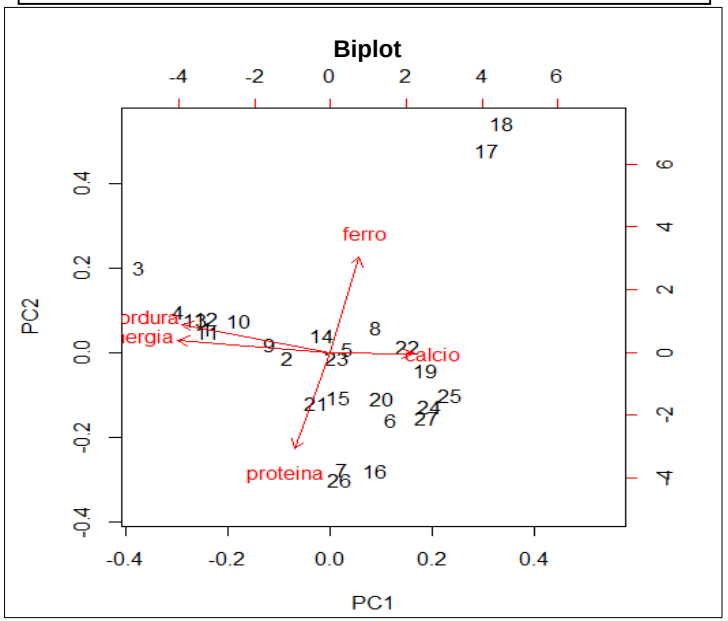
Dados Originais: decomposição de S





Dados Padronizados: decomposição de R





Prop.Ac.Expl.;
0.44 0.67 0.84

Análise de Componentes Principais

Na prática, Σ e R não são conhecidas e estimativas (MVS ou estimadores robustos) são utilizadas na decomposição espectral.

- Variáveis originais (Y) em escalas diferentes (com heterocedasticidade) podem ser padronizadas, o que equivale aos CP via R. Os resultados via Σ ou R NÃO são os mesmos e não há uma função relacionando-os.

- Quando o objetivo é o agrupamento de observações, em geral, não há necessidade de padronização das variáveis. Contudo, se o objetivo é a construção de índices (ancestralidade, escore de qualidade de vida, escore de desempenho do atleta, etc.), recomenda-se padronizar as variáveis.

- A interpretação das CP é fundamental (termos como “média ponderada” e “diferença entre médias ponderadas” das variáveis são comumente utilizados). Os coeficientes/cargas/pesos (coordenadas dos autovetores P_j) e as correlações (r_{YjZk}) das variáveis originais com os CP são úteis na interpretação dos componentes principais.

- A estrutura de Σ é decisiva na análise de CP. Sob a estrutura uniforme, as variáveis originais têm o mesmo “peso” na construção do CP1.