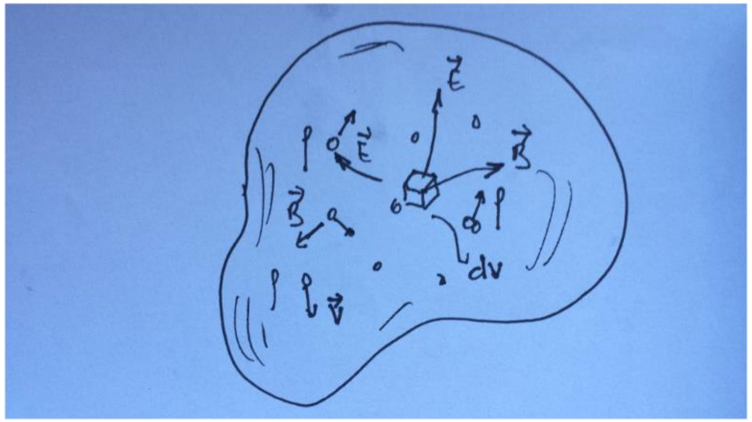
Conservação de Momentum Linear

(Jackson 8.2.2; 8.2.3)

Campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ atuando sobre as cargas em um meio, além da energia, alteram seus momentos linear e angular.



- Força atuante na carga dq, dentro do volume elementar dv:

$$d\vec{F} = \rho\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)dV = \left(\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}\right)dV$$

Portanto, podemos definir a força por unidade de volume como

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dv} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

Como no Teorema de Poynting, vamos escrever esta força só em termos dos campos.

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}; \quad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right),$$

portanto,

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}$$

O último termo deste relação pode ser modificado para introduzir a derivada temporal do Vetor de Poynting $\vec{S}$:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$$

Usando esse resultado, temos

$$\vec{f} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{S} + \epsilon_0\left[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})\right]$$

Relação vetorial:

$$\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \vec{a}\times\left(\nabla\times\vec{b}\right) + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + \left(\vec{b}\cdot\nabla\right)\vec{a}$$

portanto

$$\vec{a}\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla\left(\frac{a^2}{2}\right) - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{a}$$

Aplicando esse resultado tanto na expressão para $\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)$ como para $\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)$, temos

$$\vec{f} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{S} + \epsilon_0\left[\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E} + \left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{E} - \nabla\frac{E^2}{2}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{B} - \nabla\frac{B^2}{2}\right]$$

O segundo e terceiro termos dessa expressão podem ser escritos de uma forma mais conveniente definindo o *Tensor Tensão de Maxwell* como

$$\overleftrightarrow{T} = \epsilon_0\left[\vec{E}\vec{E} - \frac{E^2}{2}\overleftrightarrow{I}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B}\vec{B} - \frac{B^2}{2}\overleftrightarrow{I}\right]$$

onde $\overleftrightarrow{I}$ é o tensor unitário.

OBS: notação de díada de um tensor $\leftrightarrow$ Jackson usa a notação matricial.

Para quem não se lembra, escrever

$$\overleftrightarrow{T} = \vec{a}\vec{b} \ \rightarrow \overleftrightarrow{T} = a_x b_x \hat{e}_x \hat{e}_x + a_x b_y \hat{e}_x \hat{e}_y + \cdots + a_z b_y \hat{e}_z \hat{e}_y + a_z b_z \hat{e}_z \hat{e}_z$$

$$\overleftrightarrow{T} = \vec{a} \otimes \vec{b}$$

e

$$\vec{I} = \hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y + \hat{e}_z \hat{e}_z$$

Assim

$$\vec{c} \cdot \overleftrightarrow{T} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} \ \text{ e } \ \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

<u>Divergente</u>: derivadas se aplicam a todos os termos à sua direita, mas o produto escalar dos versores só ao primeiro vetor,

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{a}\vec{b}\right) = (\nabla \cdot \vec{a})\vec{b} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b}$$

Para tensores, o Teorema de Gauss também se aplica, na forma: $\int dV \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \int d\vec{S} \cdot \overleftrightarrow{T}$

Usando a definição do Tensor Tensão de Maxwell, temos

$$\boxed{\vec{f} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}}$$

A força eletromagnética total sobre as cargas dentro do volume V é dada por

$$\boxed{\vec{F} = \int dV \left(\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \right) = \oint \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{S} dV}$$

Nesta expressão utilizamos o Teorema de Gauss, a simetria de $\overleftrightarrow{T}$, isto é, $d\vec{A} \cdot \overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A}$, e representamos o vetor diferencial de área por $d\vec{A}$ para evitar confundir com o Vetor de Poynting.

<u>Recomendação</u>: analisar detalhadamente o Exemplo 8.2 do Jackson (2ª edição, pag. 364), para apreciar a relevância do Tensor Tensão de Maxwell. No caso estático, para calcular a força eletromagnética total dentro de um volume, basta conhecer $\overleftrightarrow{T}$ na sua superfície!

Conservação de Momento Linear

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{mec}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{p}_{mec}}{dt} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{S}dV = \oint \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A}$$

Densidade de momento armazenado nos campos:

$$\vec{g} = \mu_0\epsilon_0\vec{S} \rightarrow \boxed{\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S}}$$

Fluxo de momento transportado pelos campos: $-\overleftrightarrow{T}$ $\quad [T] = \left[\frac{(ML/T)}{L^2T}\right]$

---

1. Analisar detalhadamente o Exemplo 8.3 do Jackson (2ª edição, pag. 368)
2. Ler a seção 27-6 do Feynman, Vol II
3. Leia sobre o Abraham-Minkowski dilema sobre a interpretação de $\vec{g} = \vec{S}/c^2$ no Exemplo 58 do livro Ph. W. Couteille; *Electrodynamics*, do IFSC.
4. Leia sobre conservação de momento angular no livro do Prof. Frenkel