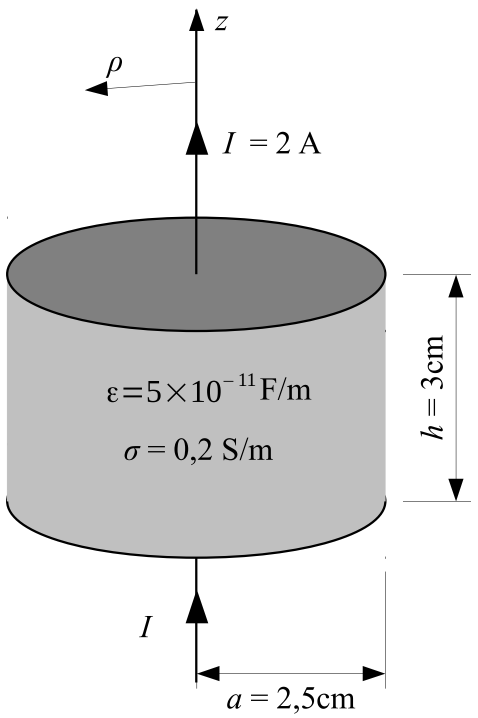
PTC-3213 - Eletromagnetismo 1a. Prova - 04/09/2015
GABARITO

1a. Questão (4,0) A figura abaixo mostra uma fatia cilíndrica de um material, com condutividade σ=0,2 S/m e permissividade $\varepsilon=5\times10^{-11}$ F/m, colocada entre dois discos circulares de material com condutividade muito alta (pode ser considerada infinita). O material tem uma espessura h = 3 cm e raio a = 2,5 cm (mesmo raio dos discos).



Uma corrente constante, I = 2 A, flui através desse material e dos fios que conectam os discos a uma fonte (suposta muito afastada).

a) (0,5) Sabendo que a corrente se distribui uniformemente no material, determine os vetores $\vec{J}$, $\vec{E}$ e $\vec{D}$ nesse meio, explicitando seus sentidos.

$$\vec{J}=\frac{I}{\pi a^2}\hat{u}_z=1019\,\hat{u}_z \ \ \text{A/m}^2$$

$$\vec{E}=\frac{\vec{J}}{\sigma}=\frac{I}{\sigma\pi a^2}\hat{u}_z=5093\,\hat{u}_z\,\text{V/m}$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\frac{\varepsilon I}{\sigma\pi a^2}\hat{u}_z=2{,}546\times10^{-7}\hat{u}_z\,\text{C/m}^2$$

$\vec{J}$ =_1019_ û$_z$_(A/m^2), $\vec{E}$ =_5093___û$_z$_(V/m) $\vec{D}$ =__2,546 x 10^{-7}_û$_z$_(C/m^2)

b)(0,5) Supondo perfeita simetria axial, determine a expressão do campo magnético $\vec{H}$ dentro do material em função da distância ao eixo de simetria, ρ , explicitando seu sentido.

$$\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint_S\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}\underset{\rho<a}{\Rightarrow} H_\phi 2\pi\rho=J_z\pi\rho^2\Rightarrow H_\phi=\frac{J_z\rho}{2}=\frac{I\rho}{2\pi a^2}=510\rho \ \ \text{A/m}$$

$\vec{H}(\rho)$ =__510 ρ____û$_z$(A/m) $\rho\le a$

c) (1,0) Calcule os valores dos 5 termos do teorema de Poynting dentro desse material e verifique sua validade:

$\vec{E}^i=0;\ \partial/\partial t=0\Rightarrow$ termos 1, 3 e 4 são nulos.

$$\iiint_\tau \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma}d\tau=\iiint_\tau\frac{1019^2}{0{,}2}d\tau=\frac{1019^2}{0{,}2}h\pi a^2=306 \ \text{W}$$

$$\vec{E}\times\vec{H}=5093\,\hat{u}_z\times510\rho\,\hat{u}_\phi=-2.600.000\,\rho\,\hat{u}_\rho$$

$$\oint_\Sigma \vec{E}\times\vec{H}\cdot d\vec{S}=\iint_{S\text{ lateral}}-2.600.000\,a\,dS=-65.000\,h2\pi a=-306 \ \text{W}$$

$$\iiint_\tau \vec{E}_i\cdot\vec{J}\,d\tau=\iiint_\tau\frac{|\vec{J}|^2}{\sigma}d\tau+\iiint_\tau\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}d\tau+\iiint_\tau\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\tau+\oint_\Sigma\vec{E}\times\vec{H}\cdot d\vec{S}$$

____0_____ =___306_ + ____0_____ + ____0_____ + ___-306__ W

A partir do instante t = 0, a corrente nos fios é interrompida e dentro do material o campo elétrico passa decair exponencialmente : $\vec{E}(t)=\frac{2}{\sigma\pi a^2}e^{-\left(t/\tau\right)}$.

d)(1,0) Supondo-se que $\vec{D}=0$ abaixo do disco inferior, e sabendo-se que $\vec{J}=0$ fora do material, aplique as condições de contorno das componentes normais dos vetores $\vec{J}$ e $\vec{D}$ na tampa inferior e demonstre que $\tau=\varepsilon/\sigma=0{,}25\,\text{ns}$.

$$\vec{J}(t)=\sigma\vec{E}(t)=\frac{2}{\pi a^2}e^{-\left(t/\tau\right)} \quad ; \quad \vec{D}(t)=\varepsilon\vec{E}(t)=\frac{2\varepsilon}{\sigma\pi a^2}e^{-(t/\tau)}\hat{u}_z$$

$$J_{n1}-J_{n2}=-\frac{\partial\rho_s}{\partial t}\Rightarrow\frac{2}{\pi a^2}e^{-t/\tau}-0=-\frac{\partial\rho_s}{\partial t} \quad (1)$$

$$D_{n1}-D_{n2}=\rho_s\Rightarrow\frac{2\varepsilon}{\sigma\pi a^2}e^{-t/\tau}-0=\rho_s \quad (2)$$

substituindo-se (2) em (1): $\frac{2}{\pi a^2}e^{-t/\tau}=-\frac{2\varepsilon}{\sigma\pi a^2}e^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\right)\Rightarrow 1=\frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{1}{\tau}\Rightarrow\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}=0{,}25\ \text{ns}$

e) (1,0) Determine a nova expressão do campo magnético dentro do material nessas condições, $\tau=\varepsilon/\sigma$, e então determine quais dos 5 termos do teorema de Poynting são não nulos agora, explicitando o seu sinal. Lembre-se da corrente de deslocamento.

$$\vec{J}(t)=\sigma\vec{E}(t)=\frac{2}{\pi a^2}e^{-(t/\tau)}\hat{u}_z \quad (1)$$

$$\vec{D}(t)=\varepsilon\vec{E}(t)=\frac{2\varepsilon}{\sigma\pi a^2}e^{-(t/\tau)}\hat{u}_z\Rightarrow\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=-\frac{1}{\tau}\frac{2\varepsilon}{\sigma\pi a^2}e^{-(t/\tau)}\hat{u}_z=-\frac{2}{\pi a^2}e^{-(t/\tau)}\hat{u}_z \quad (2)$$

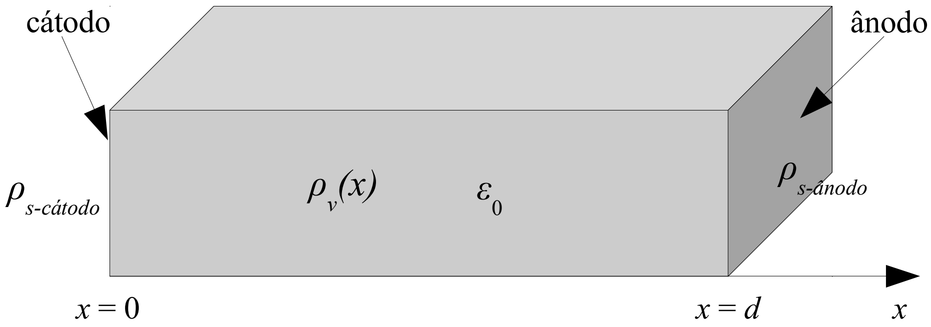
de (1) e (2): $\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0\Rightarrow\vec{H}=0$

$\vec{H}(\rho)$ = _____0_____û__(A/m) $\rho\leq a$

$$\iiint_\tau \vec{E}_i\cdot\vec{J}\,d\tau=\iiint_\tau\frac{|\vec{J}|^2}{\sigma}d\tau+\iiint_\tau\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}d\tau+\iiint_\tau\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\tau+\oint\!\!\oint_\Sigma\vec{E}\times\vec{H}\cdot d\vec{S}$$

____0_____ = ____>0____ + ____<0____ + ____0_____ + _____0____

2a. Questão (3,0) A figura abaixo mostra um diodo à vácuo, que consiste em dois eletrodos planos, o cátodo e o ânodo e uma distribuição de cargas entre eles. O potencial do cátodo é nulo e o potencial do ânodo é V_0 (V_0 > 0). A distribuição de potencial ao longo do diodo pode ser posta na forma $\varphi(x)=V_0\left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}$, para $0\le x\le d$ em que d é a distância entre os eletrodos. Admita que a seção reta do dispositivo seja igual a S. Pede-se calcular:



a) (0,5) O vetor campo elétrico no interior do diodo e o vetor densidade de fluxo elétrico.

Somente há campo elétrico na direção x :

$$\vec{E}=-\nabla\varphi=\frac{-\partial\varphi}{\partial x}\hat{u}_x=-V_0\frac{4(x)^{1/3}}{3d^{4/3}}\hat{u}_x \quad \text{e} \quad \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}=-\varepsilon_0 V_0\frac{4(x)^{1/3}}{3d^{4/3}}\hat{u}_x$$

$$\vec{E} = -V_0\frac{4(x)^{1/3}}{3d^{4/3}}\hat{u}_x \qquad \vec{D} = -\varepsilon_0 V_0\frac{4(x)^{1/3}}{3d^{4/3}}\hat{u}_x$$

b)(0,5) A densidade volumétrica de carga no interior do diodo.

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_v \quad \text{logo} \quad \rho_v=-\varepsilon_0 V_0\frac{4(x)^{-2/3}}{9d^{4/3}}$$

$$\rho_v(x) = -\varepsilon_0\frac{4(x)^{-2/3}}{9d^{4/3}}$$

c) (1,0) A densidade superficial de carga no cátodo e no ânodo.

Por condições de contorno, ρ_s no cátodo é igual ao valor de D_x em x=0, ou seja, $\rho_s(x=0)=0$.

ρ_s no ânodo é igual ao valor de $-D_x$ em x=d,

$$\rho_s(x=d)=-D_x(x=d)=\varepsilon_0 V_0\frac{4(d)^{1/3}}{3d^{4/3}}=\varepsilon_0 V_0\frac{4}{3d}$$

$\rho_{s-cátodo}$ = __0_____ $\qquad \rho_{s-ânodo} = \varepsilon_0 V_0\frac{4}{3d}$

d)(1,0) A carga total no diodo.

Carga com distribuição volumétrica:

$$Q_v = \iiint_\tau \rho_v \, d\tau = S\int_0^d -\varepsilon_0 V_0 \frac{4(x)^{-2/3}}{9d^{4/3}} dx = -\varepsilon_0 S V_0 \frac{4}{9d^{4/3}} 3x^{1/3}\Big|_0^d = -\varepsilon_0 S V_0 \frac{4}{3d}$$

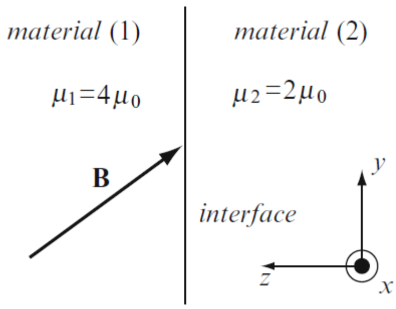
Carga no cátodo : $Q_{cátodo} = 0$

Carga no ânodo: $Q_{ânodo} = S\rho_{s-ânodo} = S\varepsilon_0 V_0 \frac{4}{3d}$

portanto, a carga total é: $Q_{cátodo} + Q_{ânodo} + Q_v = 0$

Q_{total} =___0____ C

3a. Questão (3,0) Dois materiais são separados por uma interface plana, como ilustrado na figura ao lado. O material (1) tem permeabilidade relativa 4, enquanto que a do material (2) vale 2. A interface está em $z = 0$. A densidade de fluxo magnético em (1) é conhecida, e vale $\vec{B}=0{,}1\hat{u}_x+0{,}2\hat{u}_y-0{,}1\hat{u}_z$ [T]. Em (2) sabe-se que todos componentes tangenciais da intensidade de campo magnético são nulos ($H_x=H_y=0$ para $z<0$).



Pede-se:

a) (1,5) Calcular a densidade de fluxo magnético em (2).

$B_{n1}=B_{n2} \rightarrow \dot{n}_2 = \hat{u}_z \rightarrow B_{n2} = -0{,}1\,\hat{u}_z$, $\rightarrow H_{2x}=H_{2y}= 0 \rightarrow B_{2x}=B_{2y}= 0 \rightarrow B_2 = -0{,}1\,\hat{u}_z$ [T]

$\vec{B}_2$ = _____-0,1 $\hat{u}_z$___________(T)

b) (1,5) Calcular a densidade de corrente superficial que deve existir na interface para que essa condição seja satisfeita.

$H_1 = B_1/\mu_1 \rightarrow H_1 = 0{,}025/\mu_0\,\hat{u}_x + 0{,}05/\mu_0\,\hat{u}_y - 0{,}025/\mu_0\,\hat{u}_z$ [A/m]
$J_S = \dot{n} \times (H_1 - H_2) = \dot{n} \times H_1 \rightarrow \dot{n} = \hat{u}_z \rightarrow J_S = \hat{u}_z \times H_1$
$J_S = \hat{u}_z \times (0{,}025/\mu_0\,\hat{u}_x + 0{,}05/\mu_0\,\hat{u}_y + 0{,}025/\mu_0\,\hat{u}_z) = -0{,}05/\mu_0\,\hat{u}_x + 0{,}025/\mu_0\,\hat{u}_y$
$J_S = -10^6/8\pi\,\hat{u}_x + 10^6/16\pi\,\hat{u}_y$ [A/m]

$\vec{J}_S$ = ____$-10^6/8\pi\,\hat{u}_x + 10^6/16\pi$________(A/m)