$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Propriedades das Séries

(I) Seja α um real dado. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \cdot a_n$ será convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(II) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ forem convergentes, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ será convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

(III) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será convergente se e somente se, para todo natural p, $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ for convergente. Além disso, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, teremos, para $p \geq 2$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p-1} a_n + \sum_{n=p}^{+\infty} a_n$$

Critério de Convergência e Divergência

Um ponto de importância capital é a formulação de regras ou "critérios" que nos permitam decidir sobre a convergência ou divergência de uma dada série. O problema é semelhante e, na verdade, intimamente relacionado ao problema de integrais impróprias. Essa relação ficará mais clara adiante.

(1) Critério do termo geral

Se não tivermos $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergirá.

Demonstração: Se a série convergir para S, então:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

Logo, se a_n não convergir para 0, a série não poderá convergir.

Importante! - Esse critério só pode ser utilizado para atestar divergências. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a série $\sum a_n$ poderá convergir ou divergir. Deve-se observar também que, para mostrar que a_n não converge para 0, não é preciso mostrar que a_n converge para outro número, pois se chegará à mesma conclusão se for possível mostrar que a seqüência a_n diverge.

Exemplo 1: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Aqui $a_n = \pm 1$; portanto, a_n diverge e a série diverge.

Exemplo 2: $\sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} = \infty$. A série diverge.

Exemplo 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{4n+5} = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{n}{n}\left(\frac{3-\frac{1}{n}}{4+\frac{5}{n}}\right) = \frac{3}{4}$. A série diverge.

$\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{5}{n} \to 0$

Exemplo 4: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. O teste não revela nada. Essa série é a série harmônica e veremos adiante que ela diverge.

Exemplo 5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. O teste não revela nada. No entanto, essa série converge para 1.

② Convergência Absoluta: Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergir, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergirá; em outras palavras, toda série absolutamente convergente é convergente.

Exemplo 1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots$

Dado que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ também convergirá.

Exemplo 2: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. $\sum_{n=}^{\infty} |(-1)^n| = 1+1+1 \dots$ Como a série em módulo diverge, então a série divergirá... Será?

Exemplo 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{-n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ A série dos valores absolutos é a série harmônica. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{-n} \right|$ é divergente. No entanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{-n}$ é convergente. Portanto, o critério só atesta a convergência da série. Do contrário, nada podemos dizer.

Uma série $\sum a_n$ que converge, mas que não é absolutamente convergente, é chamada de condicionalmente convergente. Na série em questão, a convergência ocorre pela presença de sinais negativos.

③ Critério da Comparação para convergência: Se $|a_n| \leq b_n$ para $n = 1, 2, \dots$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergir, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

Demonstração: A série $\sum |a_n|$ ou é convergente ou divergente. Se ela for divergente, então

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} |a_j| = \infty ;$$

Como $b_n \geq |a_n|$, teríamos então:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} b_j = \infty.$$

de modo que $\sum b_n$ divergirá, o que estaria em contradição com a hipótese. Logo, $\sum |a_n|$ converge e $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$

Como $\left| \frac{1}{n.2^n} \right| = \frac{1}{n.2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ e a série $\sum \frac{1}{2^n}$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$ também convergirá.

④ Critério da comparação para divergência: Se $a_n \geq b_n \geq 0$ para $n = 1, 2, \dots$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergir, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergirá.

Demonstração: Se $\sum a_n$ fosse convergente, então em virtude do critério 3, $\sum b_n = \sum |b_n|$ também seria convergente. Logo, $\sum a_n$ diverge.

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}$. Para $n>2$,

$$\frac{n-1}{n^2} > \frac{1}{2n}.$$

O termo $\frac{1}{n}$ é divergente na série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2} = \infty$.

O fato de $\frac{1}{n}$ ser multiplicado $\frac{1}{2}$ na desigualdade acima, não altera a divergência da série. O fato da desigualdade acima também não ser válida para $n<3$, não afeta a conclusão acima.

Importante: Nada se pode concluir a respeito da série $\sum a_n$ a partir da desigualdade: $|a_n| \leq |b_n|$, sendo que $\sum b_n$ diverge; tampouco nada se pode inferir da desigualdade: $a_n \geq b_n > 0$, quando $\sum b_n$ converge.

5 **Critério da Integral**: Seja $y = f(x)$ uma função que satisfaz às seguintes condições:

(a) $f(x)$ é definida e contínua para $c \leq x < \infty$;

(b) $f(x)$ é decrescente para x crescente e $\lim_{x \to \infty} = 0$;

(c) $f(n) = a_n$.

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ou diverge conforme a integral imprópria $\int_c^{\infty} f(x).dx$ converge ou diverge.

Exemplo: A série harmônica de ordem p,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

converge se $p>1$ e diverge se $p \leq 1$.

O termo geral $\frac{1}{n^p}$ não converge para 0 quando $p \leq 0$; portanto, para $p \leq 0$ a série certamente diverge. Para $p > 0$, o critério da integral pode ser utilizado, tomando-se $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Seja, agora, $p \neq 1$. Temos:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{b^{p-1}}\right)\right] = \frac{1}{p-1}$$

Esse resultado é válido para $p > 1$. Para $p < 1$, a integral diverge, já que $p-1 < 0$ e $b^{-(p-1)} \to \infty$. Para $p = 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \ln|b| = \infty$$

e a integral diverge.

(6) **Critério da Razão**: Se $a_n \neq 0$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

então:

Se $L < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente;

Se $L = 1$, nada se conclui;

Se $L > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo: A série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$ é convergente ou divergente?

Solução: O termo geral da série acima é $a_k = \frac{2^k}{k!}$. Logo,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \frac{2^k \cdot 2 \cdot k!}{2^k \cdot (k+1) \cdot k!} = \frac{2}{k+1}.$$ Assim, $\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{2}{k+1} = 0.$

Pelo critério da razão, podemos concluir que a série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$ é convergente.

Exemplo: Mostre que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{k!}$ é divergente.

Solução:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} = \frac{(k+1)^k \cdot \cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)} \cdot k!} = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

$\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$. Como $e > 1$, então essa série diverge.

⑦ **Critério da Raiz:** Seja a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, com $a_k > 0$ para todo $k \geq q$, sendo q um número natural fixo. Suponhamos que o $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ exista, finito ou infinito. Seja,

$$L = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$$

Então:

Se $L < 1$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ é convergente;

Se $L > 1$ ou $L = +\infty$, $\sum_{k=0}^{+\infty}$ é divergente;

Se $L = 1$, o critério nada revela.

Exemplo: A série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k}$ é convergente ou divergente?

Solução: Aplicando-se o critério da raiz, temos:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{3}{k}} = \lim_{k\to\infty} e^{\ln k^{\frac{3}{k}}} = \lim_{k\to\infty} e^{3 \cdot \frac{\ln k}{k}} \rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k}.$$ Por L'Hospital, temos:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{[\ln k]'}{[k]'} = \lim_{k\to\infty} \frac{[1/k]}{[1]} = 0 \therefore \lim_{k\to\infty} e^{3 \cdot \frac{\ln k}{k}} \overset{=0}{} = 1.$$ Logo, a série é convergente.

⑧ **Critério de Raabe:** Seja a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, com $a_k > 0$ para todo natural k. Suponha que o $\lim_{k\to+\infty} k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$ exista, finito ou infinito. Seja

$$L = \lim_{k \to \infty} k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$$

Nessas condições, tem-se:

Se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ é convergente;

Se $L < 1$ ou $L = -\infty$, então $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ é divergente.

Se $L = 1$, o critério nada revela.

Exemplo: Analise a convergência da série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ pelo critério de Raabe

Solução:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} \quad , \quad a_k = \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = k.\left(1 - \frac{1}{(k+1).(k+2)} \cdot \frac{k.(k+1)}{1}\right) = k.\left(1 - \frac{k}{(k+2)}\right) = \frac{k.(k+2) - k^2}{(k+2)} =$$

$$\frac{k^2 + 2k - k^2}{(k+2)} = \frac{2k}{k+2}$$. Logo, $\lim_{k \to \infty} \left(\frac{2k}{k+2}\right) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k}\left(\frac{2}{1 + \underbrace{(2/k)}_{0}}\right) = 2$. Portanto, conclui-se que a série é convergente.

⑨ Critério de De Morgan: Seja a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, com $a_k > 0$, para $k \geq q$, sendo q um natural fixo. Suponhamos que:

$$\lim_{k \to +\infty} \ln(k) \left[k.\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) - 1\right] = L$$

com L finito ou infinito. Então,

Se $L > 1$ ou $L = +\infty$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ é convergente

Se $L < 1$ ou $L = -\infty$ $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ é divergente

Se $L = 1$, o critério nada revela.

Exemplo: Estude a série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ com relação à convergência e divergência, sendo

$a_k = \frac{3.5.7.\ldots(2k+1)}{2.4.6\ldots 2^k} \cdot \frac{1}{k^\alpha}$ e α um real dado.

Solução: Os termos a_k e a_{k+1} podem ser escritos como:

$$a_k = \frac{3.5.7.\times\ldots\times(2k+1)}{2.4.6\times\ldots\times 2k}\cdot\frac{1}{k^\alpha} \quad , \quad a_{k+1} = \frac{3.5.7.\times\ldots\times(2k+1).(2k+3)}{2.4.6.\times\ldots\times 2k.(2k+2)}\cdot\frac{1}{(k+1)^\alpha}$$

A razão entre os termos é dada por:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3.5.7\times\ldots\times(2k+1)(2k+3)}{2.4.6\times\ldots\times(2k)(2k+2)}\cdot\frac{1}{(k+1)^\alpha}\times\frac{2.4.6\times\ldots\times 2k.k^\alpha}{3.5.7\times\ldots\times(2k+1)} = \frac{(2k+3)}{(2k+2)}\cdot\frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha}$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{(2k+3).k^\alpha}{(2k+2).(k+1)^\alpha} = \lim\limits_{k\to\infty}\overset{\cong 1}{\frac{k}{k}}\,\frac{(2+\overset{\to 0}{\frac{3}{k}})}{(2+\underset{\downarrow 0}{\frac{2}{k}})}\cdot\overset{\cong 1}{\frac{k^\alpha}{k^\alpha}}\cdot\frac{1}{(1+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{k}})^\alpha} = 1$, segue que o critério da razão nada revela sobre a convergência ou divergência da série. Vamos, então, aplicar o critério de Raabe. Assim, temos:

$$k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = k\left(1-\frac{(2k+3)}{(2k+2)}\cdot\frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha}\right)$$

De forma a facilitar a análise, podemos proceder com a seguinte mudança de variável. $k=\frac{1}{m}$ ∴

$$k\left(1-\frac{(2k+3)}{(2k+2)}\cdot\frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha}\right) = \frac{1-\frac{2+3m}{2(1+m)^{\alpha+1}}}{m}.$$ Tirando o limite, temos:

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{(2k+3)}{(2k+2)}\cdot\frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha}\right) = \lim_{m\to 0^+}\frac{1-\frac{2+3m}{2(1+m)^{\alpha+1}}}{m} = \left[\frac{0}{0}\right]$$, ou seja, temos uma indeterminação. Nesse caso, vamos aplicar a Regra de L'Hospital, tal que:

$$\lim_{m\to 0^+}\frac{1-\frac{2+3m}{2(1+m)^{\alpha+1}}}{m} = \lim_{m\to 0^+}\frac{-6(1+m)^{\alpha+1}+2(2+3m)(\alpha+1)(1+m)^\alpha}{4(1+m)^{2\alpha+2}}.$$ Assim

$$\lim_{k\to+\infty} k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \frac{2\alpha-1}{2}.$$ Pelo critério de Raabe, a série será convergente se $\alpha > \frac{3}{2}$ e divergente para $\alpha < \frac{3}{2}$. No entanto, para $\alpha = \frac{3}{2}$ o teste nada revela. Podemos, então, aplicar o

critério de De Morgan para saber como a série se comporta quando $\alpha = \frac{3}{2}$. Como anteriormente, vamos realizar a seguinte mudança de variável: $K = \frac{1}{m}$. Logo,

$$\ln(k)\left[k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)-1\right] = (-\ln(m))\left[\frac{2(1+m)^{\alpha+1}-(2+3m)-2m(1+m)^{\alpha+1}}{2m(1+m)^{\alpha+1}}\right] =$$

$$\underbrace{-m.\ln(m)\frac{1}{2(1+m)^{\alpha+1}}}_{\mathrm{I}}\underbrace{\left[\frac{2(1+m)^{\alpha+1}-(2+3m)-2m(1+m)^{\alpha+1}}{m^2}\right]}_{\mathrm{II}}.$$

Tomando-se o limite de I, temos:

$$\lim_{m\to 0^+}\underbrace{-m.\ln(m)}_{=0}.\underbrace{\frac{1}{2(1+m)^{\alpha+1}}}_{=\frac{1}{2}} = 0$$

Tomando-se o limite de II, temos:

$$\lim_{m\to 0^+}\frac{2(1+m)^{\alpha+1}-(2+3m)-2m(1+m)^{\alpha+1}}{m^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Assim, temos de aplicar a regra de L'Hospital novamente:

$$\lim_{m\to 0^+}\frac{2(\alpha+1)(1+m)^{\alpha}-3-2(1+m)^{\alpha+1}-2m(\alpha+1)(1+m)^{\alpha}}{2m} = \left[\frac{2(\alpha+1)-3-2}{0}\right].$$ Para $\alpha = \frac{3}{2}$, teremos, novamente, $\left[\frac{0}{0}\right]$. Aplicando novamente a regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{m\to 0^+}\frac{2(\alpha+1).\alpha(1+m)^{\alpha-1}-2(\alpha+1)(1+m)^{\alpha}-2(\alpha+1)(1+m)^{\alpha}-2m(\alpha+1)\alpha(1+m)^{\alpha-1}}{2} =$$

$$\frac{2(\alpha+1).\alpha-2(\alpha+1)-2(\alpha+1)}{2} = (\alpha^2+\alpha)-\alpha-1-\alpha-1 = \alpha^2-\alpha-2$$

Para $\alpha = \frac{3}{2}$, temos: $\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)-2 = \frac{9}{4}-\frac{3}{2}-2 = \frac{9-6-8}{4} = -\frac{5}{4}$

Assim,

$$\lim_{K\to\infty}\ln(k)\left[k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)-1\right] = 0$$

Pelo critério de De Morgan, portanto, a série é divergente quando $\alpha = \frac{3}{2}$

(10) **Critério da Razão para séries de termos quaisquer**: Seja a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ com $a_k \neq 0$ para todo natural k. Suponha que $\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ exista, finito ou infinito. Seja $L = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Nessas condições, tem-se:

Se $L<1$, a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ será convergente

Se $L>1$ ou $L=+\infty$, a série $\sum_{k=0}^{+\infty}$ será divergente

Se $L=1$, o critério nada revela.

Exemplo: Determine x para que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} k.x^k$ seja convergente.

Solução: Para $x=0$, a soma da série é zero; logo, convergente. Suponhamos, então, $x\neq 0$ e apliquemos o critério da razão:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)x^{k+1}}{k.x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1).\cancel{x^k}.x}{k.\cancel{x^k}}\right| = |x|.\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)}{k} = |x|.\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k}\underbrace{\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1}\right)}_{\to 1} = |x|.$$

Segue do critério da razão, que a série é convergente se $|x|<1$ e divergente se $|x|>1$. Se $|x|=1$, o critério da razão nada revela. No entanto, se $x=1$, $\lim_{k\to\infty} k.1^k = +\infty$. Logo, a série divergirá. Se $x=-1$, então $\lim_{k\to+\infty} k(-1)^k$ não existe e, portanto, a série divergirá.

(11) **Critério de Dirichlet**: Seja a série $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k.a_k$. Suponhamos que a seqüência a_k seja decrescente e tal que $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Suponhamos, ainda, que exista $B>0$ tal que, para todo natural n, $\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq B$. Nessas condições, a série $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k.a_k$ é convergente.

Exemplo 1: Considere a série alternada $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$ $(a_k>0)$ e suponha que a seqüência a_k é decrescente, com $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Utilizando o critério de Dirichlet, prove que a série é convergente.

Solução

Seja $b_K = (-1)^K$. Para todo natural $\underline{n}$,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} b_K \right| \leq 1$$

Como, por hipótese, a_K é decrescente e $\lim\limits_{K \to +\infty} a_K = 0$, segue do critério de Dirichlet a convergência da série dada.

Exemplo 2: Prove que a série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(K)}{k}$ é convergente.

Solução: Usando as relações de Euler, podemos mostrar que:

$$\sin(a) + \sin(2.a) + \ldots + \sin(n.a) = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right) - \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right).a\right]}{2.\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$$

Para $a = 1$, $\quad |\sin(1) + \sin(2) + \ldots + \sin(K)| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$, com $b_K = \sin(k)$. Como

$a_K = \frac{1}{K} \Rightarrow \lim\limits_{K \to \infty} \frac{1}{K} = 0$ e $\left| \sum\limits_{K=1}^{+\infty} b_K \right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$ satisfazem os critérios de Dirichlet,

então a série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k)}{k}$ é convergente.