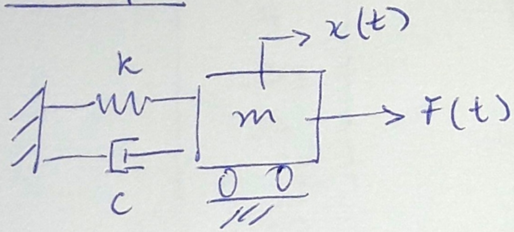
Representação na forma de espaço de Estado

Exemplo:



$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)}$$

Mudança de variáveis: $x_1 = x$, $\dot{x}_1 = x_2$

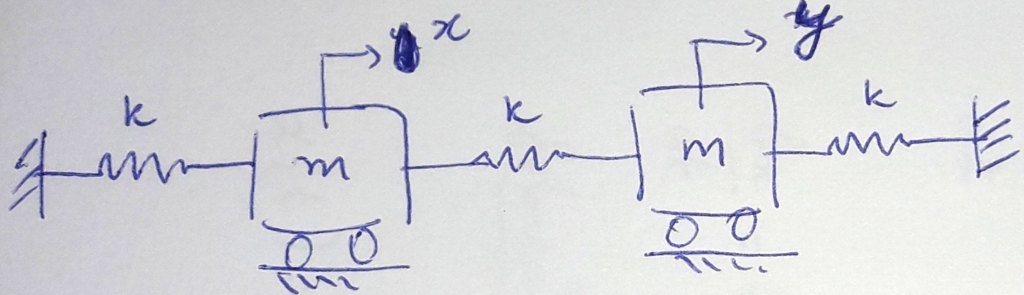
Além disso, $F(t) = u(t)$

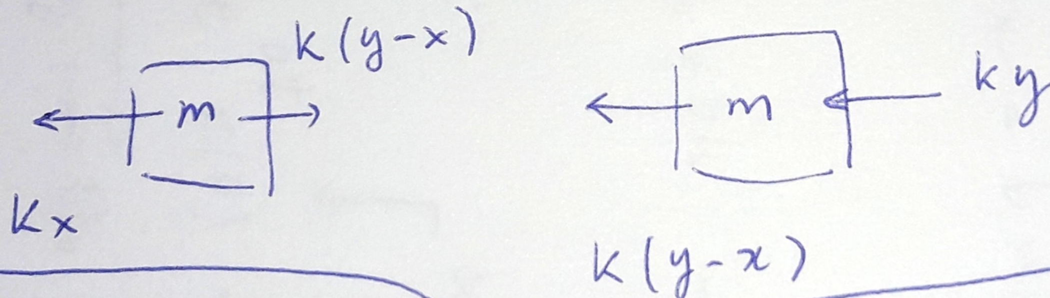
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}u(t)$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\vec{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}_{B} u(t)}$$

Outro exemplo:





$$m\ddot{x} = k(y-x) - kx$$

$$m\ddot{y} = -k(y-x) - ky$$

Mudança de variáveis: $x = x_1,\ \dot{x} = \dot{x}_1 = x_2$

$y = x_3,\ \dot{y} = \dot{x}_3 = x_4$

IV

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$m\dot{x}_2 = -2kx_1 + kx_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$m\dot{x}_4 = kx_1 - 2kx_3$$

Na forma matricial,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\vec{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{m} & 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & 0 & -\frac{2k}{m} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

III

Autovalores e autovetores

Serão úteis na soluçõ dos Eq.s dinâmicas, na forma de Espaço de Estados.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

A matriz $\underset{\sim}{A}$ pode ser decomposta da seguinte maneira:

$A = S \Lambda S^{-1}$ sendo Λ, matriz diagonal c/ elementos λ_1 e λ_2 (autovalores), e

$S = \left[\vec{s}_1 \mid \vec{s}_2 \right]$ a matriz de autovetores.

II

Assim, $AS = S\Lambda$

$$A\left[\vec{s}_1 \,\middle|\, \vec{s}_2\right] = \left[\vec{s}_1 \,\middle|\, \vec{s}_2\right]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \left[\lambda_1\vec{s}_1 \,\middle|\, \lambda_2\vec{s}_2\right]$$

$A\vec{s}_1 = \lambda_1 \vec{s}_1$ e $A\vec{s}_2 = \lambda_2\vec{s}_2$

$(A - I\lambda_i)\vec{s}_i = \vec{0}$ $i = 1, 2$ $\det(A - \lambda_i I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5-\lambda)^2 - 4^2 = 0$$

$$(\underbrace{5 - \lambda - 4}_{\lambda_2 = 1})(\underbrace{5 - \lambda + 4}_{\lambda_1 = 9}) = 0$$

VI

1º autovetor $\vec{s}_1$:

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda_1 & 4 \\ 4 & 5-\lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{1x} \\ s_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5-9 & 4 \\ 4 & 5-9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{1x} \\ s_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{1x} \\ s_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-4s_{1x} + 4s_{1y} = 0$$

$$\boxed{s_{1x} = s_{1y}} \qquad \vec{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

"normalização"

$$\begin{bmatrix} 5-1 & 4 \\ 4 & 5-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{2x} \\ s_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{2x} \\ s_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{s_{2x} = -s_{2y}} \qquad \vec{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \text{ (ortogonais)}$$

"normalização"

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Lambda}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}}_{S^{-1}}$$

VII

Sistemas de 1ª ordem

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = u(t)$$, ou ainda,

$$\frac{dx}{dt} - ax = b\,u(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu \Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)}$$

Solução:

condição inicial

$$x(t) = \underbrace{e^{at} x(0)}_{\text{reg. transitório}} + \underbrace{\int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau}_{\text{reg. permanente}}$$

VIII

Sistemas de ordem "n"

$$\boxed{\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)}$$

Solução será

$$\boxed{\vec{x}(t) = \underbrace{e^{At}\vec{x}(0)}_{\text{reg. transitório}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-T)} B\vec{u}(T)\, dT}_{\text{reg. permanente}}}$$

TX

Nos "slides" disponíveis na e-disciplina PMR3302, é realizado um esclarecimento quanto à expressão matemática

$$\boxed{e^{At}}$$

Esta expressão pode ser descrita por uma série infinita. Ao mesmo tempo, a matriz A pode ser decomposta em

$$\boxed{A = S \Lambda S^{-1}}$$

X

Assim,

$$e^{At} = S\, e^{\Lambda t}\, S^{-1}$$

sendo

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Portanto, a solução da eq. homogênea (ou a resposta em regime transitório) será

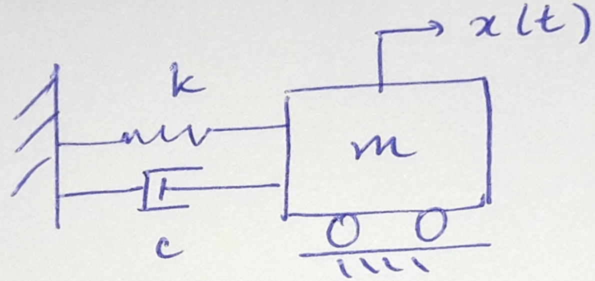
$$\boxed{\vec{x}_h = S\, e^{\Lambda t}\, S^{-1}\, \vec{x}(0)}$$

XI

Recomendação:

Determine a resposta em regime transitório (sol. da eq. homogênea) para os seguintes sistemas mecânicos:

a)



$k = 4\ N/m$

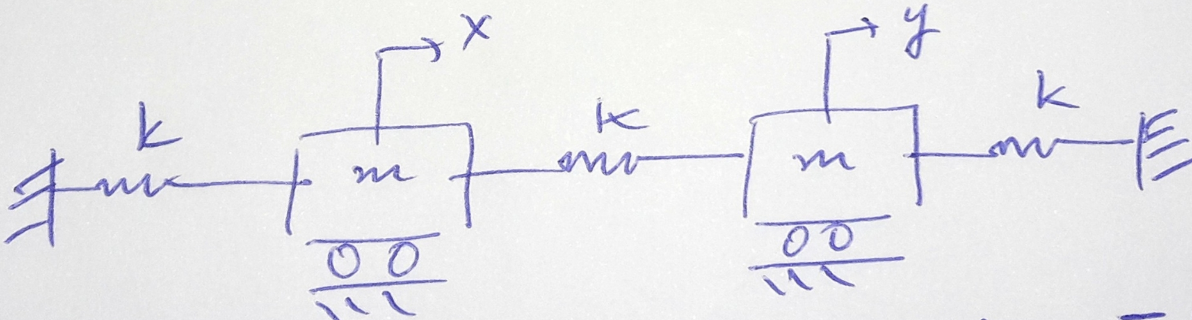
$m = 1,0\ kg$

$c = 12\ Ns/m$

$x(0) = 0,01\ m$

$\dot{x}(0) = 0$

b)



$k = 1.000\ N/m$

$m = 1\ kg$

$x(0) = -0,01\ m$

$\dot{x}(0) = 0$

$y(0) = +0,01\ m$

$\dot{y}(0) = 0$

XII

Resolva a) e b) utilizando comandos dos softwares MATLAB, SCILAB, OCTAVE, para determinar as matrizes S, Λ, S^{-1}, $e^{\Lambda t}$ e e^{At}.