ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXOS FIXOS

1. Introdução

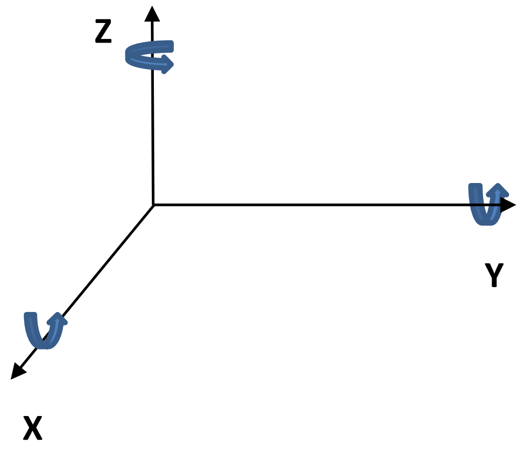


Figura 1. Representação das rotações em torno de eixos fixos.

Suponha que desejamos comandar um manipulador para rotações de seu efetuador em torno de eixos fixos. Isto, você já vivenciou na aula de laboratório, quando se escolhe rotações em relações a eixos do sistema da base. De fato, às vezes para um programador, dependendo da tarefa a ser executada, é mais simples definir rotações em torno de um sistema de eixos estáticos conhecido.

O fator complicador, neste caso, é o cálculo da matriz de rotação. Vimos que a mesma é simples de determinar no caso de rotações em torno de eixos consecutivos, como foi deduzido para os ângulos de Euler. Veremos, no entanto, que é possível utilizar dos resultados para rotações em torno de eixos consecutivos aqui também.

Tratemos do exemplo ilustrado na figura 1, que ilustra a seguinte sequência de rotações em torno de um sistema cartesiano de eixos XYZ:

1. Rotação de um ângulo “Φ” em torno de Y;
2. Rotação de um ângulo “Θ” em torno do eixo Z

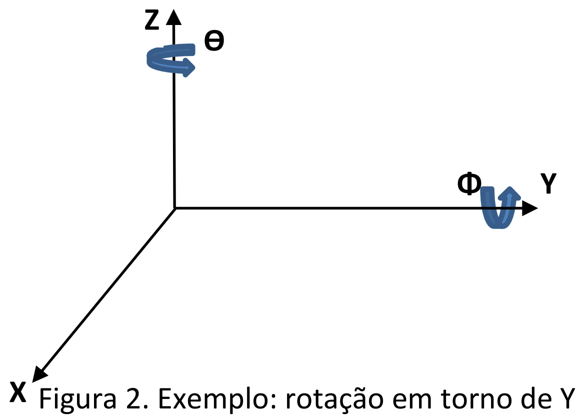


Figura 2. Exemplo: rotação em torno de Y seguida de uma rotação em torno de Z

Qual o valor final da matriz de rotação após a sequência que foi declarada?

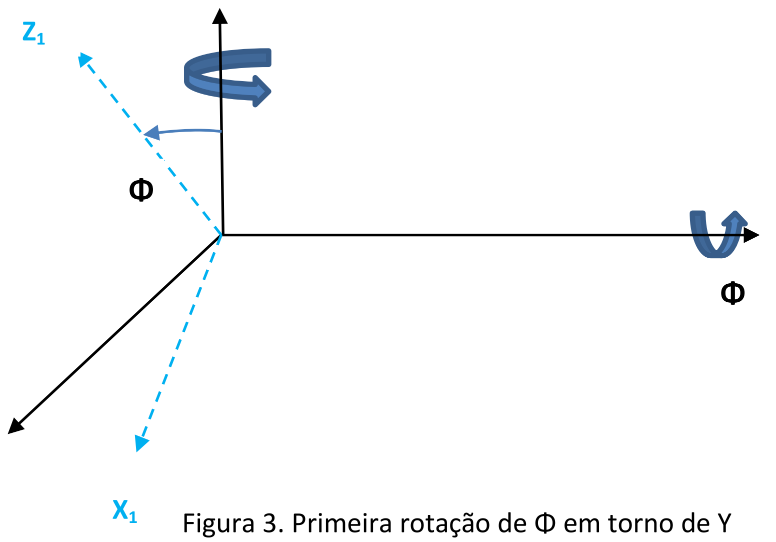


Figura 3. Primeira rotação de Φ em torno de Y

A primeira rotação é representada na figura 3. A matriz de rotação correspondente , $\boldsymbol{R}_{Y,\Phi}$, é facilmente calculável, como você viu no caso dos ângulos de Euler. Portanto, o primeiro passo para a solução para o cálculo da matriz de rotação final seria:

1. Rotação de Φ em torno de Y, determinando $\boldsymbol{R}_{Y,\Phi}$

O sistema obtido pela primeira rotação é dado por X_1, Y_1 (coincidente com Y) e Z_1

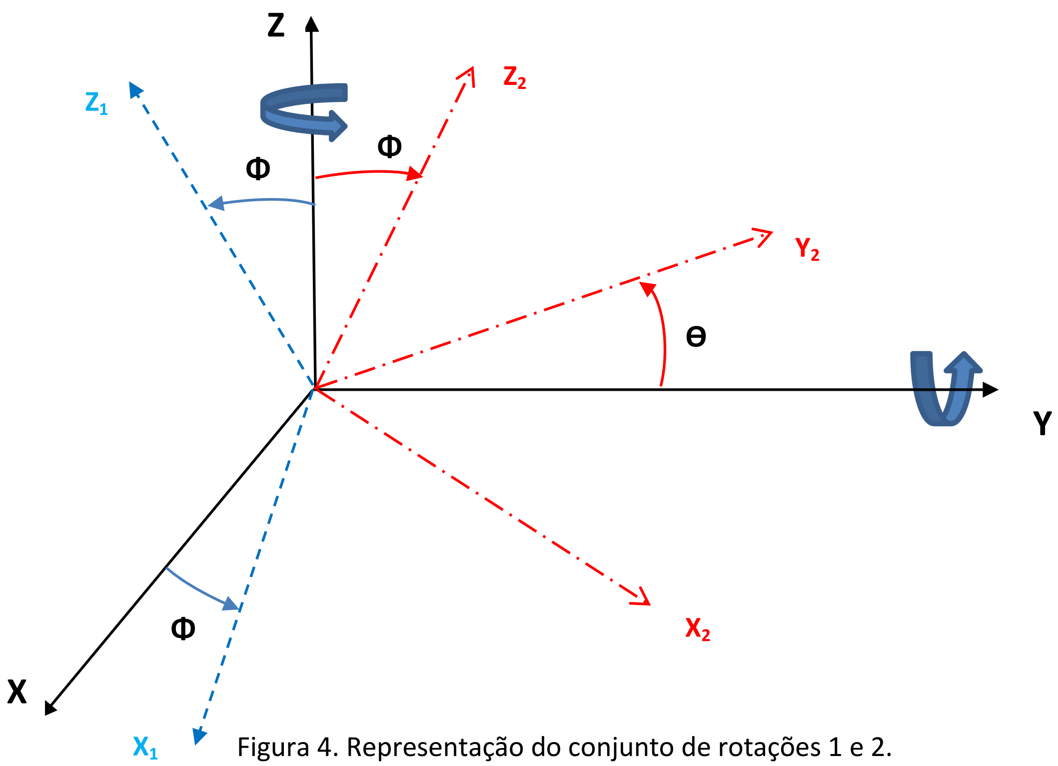


Figura 4. Representação do conjunto de rotações 1 e 2.

A segunda rotação é responsável por levar o sistema “1” ao sistema final, “2” (figura 4), girando o sistema “1” de “Θ” em torno de “Z”. Neste caso, nenhum dos eixos do sistema “1” é o eixo de rotação. O que fazer?

Note que, Z_1 e Z_2 são geratrizes de um cone cujo eixo de rotação é o eixo “Z”. Ambos formam um ângulo Φ com o eixo Z. Note, também, que o eixo “Y_2” está no plano horizontal definido por X e Y e ele pode ser visto como um eixo de rotação que leva o eixo “Z” ao eixo “Z_2”.

Podemos, então, vislumbrar a solução para usufruir das matrizes de rotação em torno de eixos consecutivos:

2. Girar o sistema “1” de –Φ em relação ao eixo Y, obtendo $\boldsymbol{R_{Y,-\Phi}}$ (voltamos ao sistema original);
3. Girar o sistema original de um ângulo Θ em torno de Z , obtendo $\boldsymbol{R_{Z,\Theta}}$ (“Y” vai para “Y_2”)
4. Girar o novo sistema de “Φ” em torno de “Y_2”, obtendo $\boldsymbol{R_{Y2,\Phi}}$ que é igual a $\boldsymbol{R_{Y,\Phi}}$.

Ou seja, a segunda rotação, que leva o sistema “1” ao sistema “2” é composta pelos passos 2, 3 e 4.

Assim, sendo, o resultado final para a obtenção da matriz de rotação final é obtido pela multiplicação abaixo:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{Y,\phi} . \boldsymbol{R}_{Y,-\phi} . \boldsymbol{R}_{Z,\theta} . \boldsymbol{R}_{Y,\phi} = \boldsymbol{R}_{Z,\theta} . \boldsymbol{R}_{Y,\phi}$$

Portanto, a matriz final é obtida pelas matrizes de rotação em torno dos eixos fixos na ordem **inversa** em que ocorrem as rotações.

Estendemos este raciocínio para o caso de 3 rotações em torno do sistema fixo cartesiano:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{Z,\theta} . \boldsymbol{R}_{Y,\phi} . \boldsymbol{R}_{X,\psi}$$

2- Ângulos de Roll-Pitch-Yaw

Utilizaremos o raciocínio expresso na seção anterior, para propor uma sequência conhecida de rotações e a correspondente obtenção da matriz de rotação. Consideramos a seguinte sequência de rotações:

1. “Yaw” em torno de X (X,Ψ);
2. “Pitch” em torno de Y(Y,Θ);
3. “Roll” em torno de Z(Z,Φ).

A matriz de rotação final é dada por:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{Z,\phi} . \boldsymbol{R}_{Y,\theta} . \boldsymbol{R}_{X,\psi}$$

Onde,

$$R_{Z,\phi} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{Y,\theta} = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & \mathrm{C}\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{X,\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi \\ 0 & S\psi & C\psi \end{bmatrix}$$

A matriz de rotação final é dada pela multiplicação das matrizes de rotações em tornos dos eixos fixos, da esquerda para a direita, na ordem inversa em que as rotações ocorrem:

$$R = R_{Z,\phi}.R_{Y,\theta}.R_{X,\psi} = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & (C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi) & (C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi) \\ S\phi C\theta & (S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi) & (S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi) \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix}$$

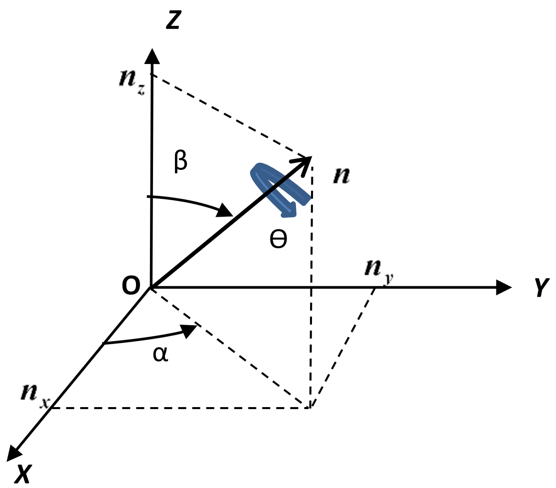
3- Rotação em Torno de um Eixo Fixo Arbitrário

Suponha que desejamos girar um sistema de coordenadas cartesiano em torno de um eixo arbitrário **n** de um ângulo Θ. O versor $\vec{n}$ é um vetor unitário, que passa pela origem O, e tem componentes n_x, n_y e n_z.

Neste caso, para se usufruir dos resultados obtidos pelas matrizes de rotação relativas a eixos consecutivos, alinha-se um dos eixos cartesianos com o eixo de rotação, gira-se o sistema em torno desse eixo de um ângulo Θ, e, depois, retorna-se à posição relativa original do reverte-se a operação de alinhamento, para se retornar à orientação original de **n** em relação aos eixos cartesianos.

Tomemos, como exemplo, o sistema representado na figura 5.

Figura 5. Representação da rotação em torno de um eixo arbitrário



Da figura, tem-se:

$$\cos\alpha = \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \qquad sen\alpha = \frac{n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}$$

$$\cos\beta = n_z \qquad sen\beta = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$$

O cálculo da matriz de rotação fica:

$$R_{n,\theta} = R_{z,\alpha}.R_{y,\beta}.R_{z,\theta}.R_{y,-\beta}.R_{z,-\alpha} =$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & -s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ -s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} n_x^2(1-c\theta)+c\theta & n_x n_y(1-c\theta)-n_z s\theta & n_x n_z(1-c\theta)+n_y s\theta \\ n_x n_y(1-c\theta)+n_z s\theta & n_y^2(1-c\theta)+c\theta & n_y n_z(1-c\theta)-n_x s\theta \\ n_x n_z(1-c\theta)-n_y s\theta & n_y n_z(1-c\theta)+n_x s\theta & n_z^2(1-c\theta)+c\theta \end{bmatrix}$$