2^a Lista de exercícios

① [1.0] Uma partícula de massa m é sujeita a uma força ao longo do eixo x, cuja intensidade é $-k\,x$.

(a) Usando as leis da dinâmica relativística, mostre que se a amplitude das oscilações dessa partícula for b, o período da oscilação é dado por:

$$T = \frac{4}{c}\int_0^b dx\,\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\ ,$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ pode ser escrito em função de x como:

$$\gamma(x) = 1 + \frac{kb^2}{2mc^2}\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)\ .$$

(b) Use uma expansão em série de Taylor para obter tanto o período do oscilador harmônico clássico (não-relativístico), $T_0 = 2\pi/\omega$ (onde $\omega = k/c$), quanto a primeira correção relativística para o período. Mostre que essa correção *aumenta* o período do oscilador harmônico por um fator proporcional a V_{max}^2/c^2, onde V_{max} é a velocidade máxima da partícula.

(c) Agora encontre o período do movimento medido no tempo próprio da partícula. Mostre que esse "período próprio" é um pouco *menor* do que o período clássico T_0.

② [1.0] A distância no espaço-tempo de Minkowski é dada pelo invariante $ds^2 = -c^2dt^2 + d\vec{x}^2$, o que resulta na 4-velocidade $U^\mu = \gamma(V)\{c\,,\,\vec{V}\}$, onde $\vec{V} = d\vec{r}/dt$. Essa distância ds pode ser vista como a "menor distância entre dois pontos" no espaço-tempo – ou seja, essas expressões denotam um *extremo* (ou limite) para o movimento de uma partícula. Em termos de uma *ação* para uma partícula de massa m teríamos, então, algo como $S \sim \int m\,ds$ (e a noção de ds como um extremo seria consequência da minimização da ação).

Mostre que, se definimos a Lagrangeana de uma partícula relativística através da expressão $\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = -mc^2/\gamma(V)$, obtemos o momento relativístico por meio da variável canônica $\vec{P}^i = \partial\mathcal{L}/\partial V^i$. Em seguida, mostre que a Hamiltoniana dessa partícula relativística nos dá justamente a energia, $E = mc^2\gamma(V)$.

③ [2.5] Uma onda eletromagnética plana pode ser descrita de uma forma simplificada em termos da propagação de uma frente de onda parametrizada por $f = A\exp[i\omega t]\exp[-i\vec{k}\cdot\vec{x}]$. Considere uma superfície que reflete essa onda, tal como um espelho. O resultado é que temos uma onda "total" dada por $f_{in} + f_{out}$, e as condições de contorno para essa onda exigem que essa onda total se anule na superfície do espelho.

(a) Escreva o problema da reflexão de uma onda num espelho que está parado na posição $x = 0$, e que ocupa todo o plano $y - z$. Obtenha a condição de que $\omega^r = \omega$ e $k_x^r = -k_x$ e para a onda refletida (note que o sinal invertido de k_x^r significa que, enquanto a onda incidente se propaga na direção $+x$, a onda refletida se propaga na direção $-x$).

(b) Agora considere que o espelho está *em movimento*, com velocidade V ($\beta = V/c$) na direção $+x$. Mostre que nesse caso a onda refletida tem frequência angular e número de onda:

$$\omega^r = \frac{\omega(1+\beta^2) - 2\,k_x\,V}{1-\beta^2}\ ,$$

$$k_x^r = -\frac{k_x(1+\beta^2) - 2\,\omega\,V/c^2}{1-\beta^2}\ .$$

(c) O resultado acima indica que os ângulos que a onda incidente (θ) e a onda refletida (θ^r) fazem com o eixo x não são mais iguais. Calcule primeiro a correção para o ângulo da onda refletida no limite não-relativístico, $\beta \ll 1$. Depois, calcule o ângulo num caso em que β tem um valor alto, por exemplo, $\beta = 0.5$. Analise o que acontece quando o ângulo θ fica alto., e verifique que o ângulo θ' pode se tornar maior do que 90°! Por quê isso acontece?

(d) Escreva essa onda plana em notação relativística. Em particular, exprima a onda plana em termos de uma *fase* que é um escalar, $f \sim \exp[i\phi]$, onde ϕ é essa fase. Lembre-se que a energia de uma onda de luz se relaciona com a sua frequência, $E = h\nu = \hbar\omega$.

(e) Agora obtenha o mesmo resultado do item (c) acima, usando a Relatividade Restrita. [Dica: utilize a invariância da fase da onda – que é um escalar, portanto é invariante sob transformações de Lorentz.]

④ [1.0] Considere a *transformação de calibre* $A_\mu \to A_\mu + \partial\lambda/\partial x^\mu$, onde λ é uma função escalar qualquer das coordenadas. Expressando os campos elétrico e magnético em termos do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, mostre que esses campos são invariantes sob transformações de calibre.

⑤ [1.0] O símbolo de *Levi-Civita* definido no espaço de Minkowski é um objeto análogo ao símbolo de Levi-Civita em três dimensões, ϵ^{ijk} (aqui índices romanos i, j, k vão de 1 a 3). Esse símbolo deve ser familiar de temas tais como determinantes, produtos vetoriais, etc.: em três dimensões, o ϵ^{ijk} é *totalmente anti-simétrico*, ou seja, $\epsilon^{ijk} = 1$ para $\{ijk\} = \{1\,2\,3\}$ e qualquer permutação par desses índices, e é -1 para qualquer permutação ímpar.

No espaço de Minkowski também existe um objeto totalmente anti-simétrico, mas em 4 dimensões: $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = 1$ para $\{\mu\nu\alpha\beta\} = \{0\,1\,2\,3\}$ e qualquer permutação par desses índices, e é -1 para qualquer permutação ímpar.

Demonstre que esse "símbolo de Levi-Civita" é *invariante* sob transformações de coordenadas – portanto, ele *não* é um tensor. [Dica: Lembre-se que uma das condições básicas das transformações de Lorentz é o fato de que elas têm o determinante = 1.]

⑥ [1.0] Expresse os campos elétrico e magnético em termos do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Considere uma transformação de Lorentz muito particular, na qual os dois referenciais S e S' estão em repouso um com relação ao outro (portanto, $v = 0$), mas S' sofreu uma rotação com relação a S.

(a) Mostre que, nesse caso, a transformação de Lorentz se reduz a:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R^i{}_j \end{pmatrix} ,$$

onde $R^i{}_j$ é uma rotação genérica em três dimensões espaciais.

(b) Mostre que, sob essa transformação de coordenadas, os campos elétrico e magnético se transformam exatamente como se fossem vetores tridimensionais – mas que não há mistura entre os dois.

⑦ [2.5] Este problema é sobre as propriedades dos campos eletromagnéticos em dois referenciais inerciais, S e S', cuja velocidade relativa é $\vec{v}$.

a) Encontre a fórmula que determina como os campos elétrico e magnético se transformam sob uma transformação de Lorentz geral: $\vec{E} \to \vec{E}'(\vec{E}, \vec{B}, \vec{v})$, e $\vec{B} \to \vec{B}'(\vec{E}, \vec{B}, \vec{v})$.

b) Suponha que no referencial S' acima os campos elétrico e magnético são *paralelos*. Encontre a velocidade que relaciona S e S'.

c) Suponha que no sistema S os campos elétrico e magnético são *perpendiculares*, $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$. Ainda é possível encontrar um sistema S' tal que os campos naquele referencial se tornam paralelos? Por quê?