Exercício 1.

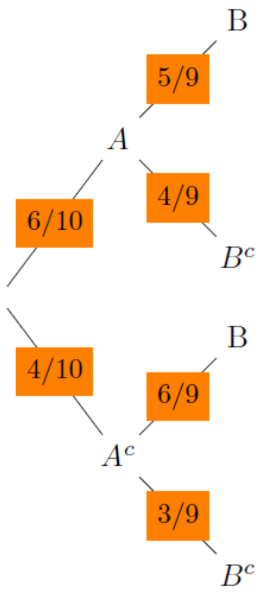
De uma urna contendo 6 bolas brancas idênticas e 4 bolas pretas também idênticas, retira-se primeiro uma bola aleatoriamente e, depois, sem reposição, retira-se uma segunda bola. Sejam os eventos:
A : A primeira retirada resulta em bola branca;
B : A segunda retirada resulta em bola branca.
Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique.

(a) $P(A) = P(B)$;

(b) A e B são independentes.

Solução

A informação dada no enunciado pode ser respresentada em um diagrama de árvore como segue



Resultados	*Probabilidades*
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \vert A)$	$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$
$P(A \cap B^c) = P(A) \times P(B^c \vert A)$	$\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$
$P(A^c \cap B) = P(A^c) \times P(B \vert A^c)$	$\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$
$P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \times P(B^c \vert A^c)$	$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

(a) *Vamos calcular* $P(A)$ *e* $P(B)$
$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(A) \times P(B|A) + P(A^c) \times P(B|A^c) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Note que $P(A) = \frac{3}{5} = P(B)$

(b) *De acordo com a definição de independência de eventos, devemos verificar:*
se $P(B|A) = P(B)$ *(ou* $P(A|B) = P(A)$*) ou se* $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$*, assim*

– $P(B|A) = \frac{5}{9} \neq \frac{3}{5} = P(B)$.
  Portanto, A e B não são independentes.

–
$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \\ P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \end{cases}$$

  Como $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, A e B não são independentes.

Observe que nos dois casos a conclusão foi a mesma.

Exercício 2.
Quando $P(A) = 1/2$, $P(B) = 2/3$ e $P(A \cup B) = 3/4$, quanto vale

(a) $P(A \cap B)$?

(b) $P(A^c \cap B^c)$?

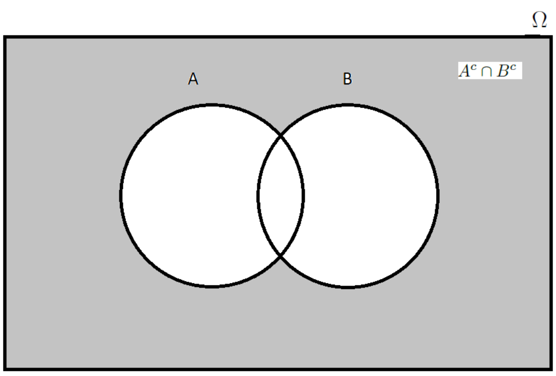
Solução

(a) *Pela regra da adição: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ segue que*

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$$

Logo $P(A \cap B) = \frac{5}{12}$

(b) *O evento $A^c \cap B^c$ é a ocorrência simultânea dos eventos A^c e B^c, ou seja, é tudo o que está fora de A e fora de B, como pode ser visto no diagrama de Venn a seguir*



Pelo diagrama é claro que: $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, assim

$$P(A^c \cap B^c) = P\left((A \cup B)^c\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad .$$

Portanto, a probabilidade de $A^c \cap B^c$ *é de* $\frac{1}{4}$.

Exercício 3.

Considere que as probabilidades relacionadas aos eventos G: "gostar de gatos" e A: "gostar de cachorros"; sejam $P(G) = 1/4$; $P(A|G) = 1/2$ e $P(G|A) = 1/4$. Responda:

(a) Os eventos G e A são mutuamente exclusivos? Justifique.

(b) Os eventos G e A são independentes? Justifique.

(c) Calcule a probabilidade de não gostar de gatos dado que gosta de cachorros.

(d) Calcule a probabilidade de não gostar de gatos e não gostar de cachorros.

Solução

(a) *Lembre que* A *e* B *são mutuamente exclusivos quando* $A \cap B = \emptyset$, *assim* $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. *Então*

$$P(A \cap G) = P(G)P(A|G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq 0.$$

Portanto, A *e* G ***não*** *são mutuamente exclusivos.*

Observação: $P(A \cap G) = 0$ ***não implica que A e B sejam mutuamente exclusivos.***

(b) *Note que:* $P(G|A) = \frac{1}{4} = P(G)$, *isto significa que a ocorrência de* A *não altera a probabilidade de ocorrência de* G, *assim* A *e* G *são independentes.*

(c) G^c *:Não gostar de gatos. Como* A *e* G *são independentes,* A *e* G^c *também são independentes. Logo*

$$P(G^c|A) = P(G^c) = 1 - P(G) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Portanto, a probabilidade de não gostar de gatos dado que gosta de cachorros é $3/4$.

(d) A^c *:Não gostar de cachorros. Como* A *e* G *são independentes,* A^c *e* G^c *também são independentes, então* $P(G^c \cap A^c) = P(G^c) \times P(A^c)$. *E ainda temos que* $P(A|G) = P(A) \Longrightarrow P(A) = \frac{1}{2} = P(A^c)$. *Logo*

$$P(G^c \cap A^c) = P(G^c) \times P(A^c) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \Longrightarrow P(G^c \cap A^c) = \frac{3}{8}$$

Portanto, a probabilidade de não gostar nem de gatos nem de cachorros é $3/8$.

Exercício 4.

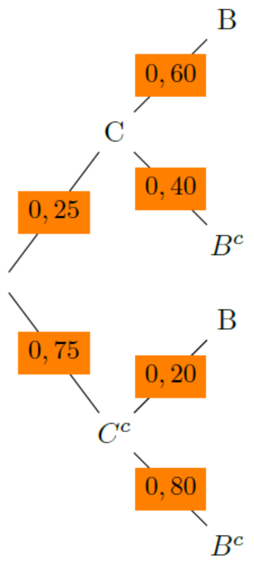
Em dada localidade chove em 25% dos dias. Um meteorologista tem 80% de probabilidade de acertar sua previsão para dias de sol, enquanto que para dias de chuva, esta probabilidade cai para 60%. Para um dia escolhido aleatoriamente, obtenha a probabilidade de

(a) o meteorologista acertar sua previsão para aquela localidade;

(b) chover na localidade, dado que a previsão é de chuva.

Solução

Sejam os eventos, C: chove e B: previsão de chuva. Então, o diagrama de árvore fica como segue



Resultados	*Probabilidades*
$P(C \cap B) = P(C) \times P(B\|C)$	$0,25 \times 0,60 = 0,15$
$P(C \cap B^c) = P(C) \times P(B^c\|C)$	$0,25 \times 0,40 = 0,10$
$P(C^c \cap B) = P(C^c) \times P(B\|C^c)$	$0,75 \times 0,20 = 0,15$
$P(C^c \cap B^c) = P(C^c) \times P(B^c\|C^c)$	$0,75 \times 0,80 = 0,60$

(a) *Denote por A: o meteorologista acerta. O meteorologista acerta quando a previsão foi chuva e de fato chove* $(C \cap B)$, *ou quando a previsão foi sol e de fato o dia foi ensolarado* $(C^c \cap B^c)$. *Então, a probabilidade do meteorologista acertar é*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(C \cap B) + P(C^c \cap B^c) = P(C) \times P(B|C) + P(C^c) \times P(B^c|C^c) \\ &= 0,25 \times 0,60 + 0,75 \times 0,80 = 0,15 + 0,60 = 0,75. \end{aligned}$$

O metorologista têm 0,75 probabilidade de acertar.

(b) *A probabilidade de chover na localidade dado que a previsão é de chuva está dada por*

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C) \times P(B|C)}{P(B)}$$

Vamos calcular $P(B)$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C \cap B) + P(C^c \cap B) = P(C) \times P(B|C) + P(C^c) \times P(B|C^c) \\ &= 0,25 \times 0,60 + 0,75 \times 0,20 \\ &= 0,15 + 0,15 = 0,30. \end{aligned}$$

Logo,

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C) \times P(B|C)}{P(B)} = \frac{0,25 \times 0,60}{0,30} = \frac{0,15}{0,30} = 0,5$$

Portanto, probabilidade de chover na localidade dado que a previsão do meteorologista é de chuva é 0,5.

Exercício 5.
Os 10000 estudantes da Universidade, cuja área de estudo e gênero foram registradas, responderam à seguinte questão: Você é a favor, contrário, ou não tem opinião sobre a "democratização do acesso à Universidade para estudantes da Escola Pública"? Os resumos das respostas estão no quadro:

Área	Sexo	OPINIÃO		
		sim	não	nto
Exatas	mas	550	1000	550
	fem	350	500	750
Humanas	mas	100	1000	750
	fem	400	600	550
Biológicas	mas	280	550	570
	fem	220	850	430

Se dentre os 10000 alunos escolhermos um aleatoriamente, qual é a probabilidade de:

(a) Ser do gênero feminino e ser favorável à questão;

(b) Ser contrário à questão, sabendo-se que é da área de exatas;

(c) Ser do gênero feminino e da área de biológicas, sabendo-se que não tem opinião.

Solução

Sejam os eventos A ao estudante está a favor da questão, C o estudante é contrário e N o estudante não tem opinião. Denote por F aos estudantes do gênero feminino e por M aos do gênero masculino. Tambén denote por E, H e B aos estudantes das áreas Exatas, Humanas e Biológicas, respectivamente. Reescrevemos a tabela usando essa notação:

Área	*Sexo*	*OPINIÃO*			*Total*
		A	C	N	
E	M	550	1000	550	2100
	F	350	500	750	1600
H	M	100	1000	750	1850
	F	400	600	550	1550
B	M	280	550	570	1400
	F	220	850	430	1500
Total		1900	4500	3600	10000

(a) $F \cap A$: *Aluno do gênero feminino e a favor da questão.*

$$P(F \cap A) = \frac{350 + 400 + 220}{10000} = \frac{970}{10000} = 0,097$$

(b) *Sabendo que o aluno é das Exatas, a probabilidade de ser Contrário á questão é*

$$P(C|E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{(1000 + 500)/10000}{(2100 + 1600)/10000} = \frac{1500}{3700} = 0,4054054 \approx 0,405.$$

(c)

$$P\left[(F \cap B)|N\right] = \frac{P(F \cap B \cap N)}{P(N)} = \frac{430/10000}{3600/10000} = \frac{430}{3600} = 0,119444 \approx 0,119.$$