

Formulação Diferencial das Equações da Mecânica dos Fluidos

- Usada em situações onde os detalhes do escoamento são importantes (variação de grandezas ponto a ponto).
- Equações diferenciais que descrevem a conservação de massa e de quantidade de movimento.
- Formulação é utilizada no desenvolvimento e implementação de métodos numéricos tais como o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos.

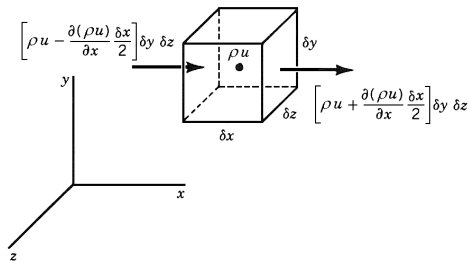
1 Conservação da massa

Sistema: $\left. \frac{DM}{Dt} \right|_{\text{sist}} = 0$

Formulação integral para $\forall C$: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0$

Vamos aplicar a um $\forall C$ diferencial.
A taxa de variação da massa no $\forall C$
é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$



A vazão em massa nas superfícies do elemento perpendiculares ao eixo x são:

$$\rho u|_{x+(\delta x/2)} \delta y \delta z = \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z$$

$$\rho u|_{x-(\delta x/2)} \delta y \delta z = \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z$$

Somando as duas, temos a vazão mássica líquida na direção x :

$$\dot{m}_x = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

Analogamente, temos: $\dot{m}_y = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$; $\dot{m}_z = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$

Portanto, a vazão mássica líquida no elemento é:

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$$

Substituindo esses resultados na eq. da conservação de massa e dividindo por $\delta x \delta y \delta z$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Em notação vetorial: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$

Para regime permanente ($\partial \rho / \partial t = 0$): $\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$

Para escoamento incompressível (ρ constante): $\nabla \cdot \vec{V} = 0$

1.1 Coordenadas cilíndricas

Eq. da continuidade:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Para regime permanente:
$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Para escoamento incompressível:
$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z} = 0$$

2 Conservação da quantidade de movimento

$$\text{Sistema: } \vec{F} = \left. \frac{D\vec{P}}{Dt} \right|_{\text{sist}} ; \quad \vec{P} = \int_{\text{sist}} \vec{V} dm$$

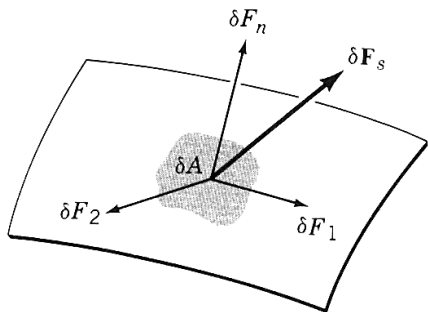
Aplicando a um sistema diferencial (massa δm):

$$\delta \vec{F} = \frac{D(\vec{V}\delta m)}{Dt} = \delta m \frac{D\vec{V}}{Dt} = \delta m \vec{a}$$

2.1 Descrição das forças

Força peso: $\delta \vec{F}_b = \delta m \vec{g} = \rho \delta x \delta y \delta z \vec{g}$

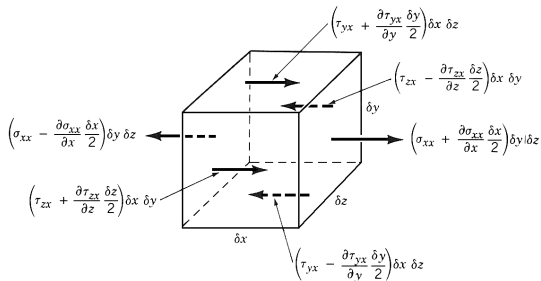
Forças superficiais: $\delta \vec{F}_s$, que pode ser decomposta nas componentes normal, δF_n , e paralelas ao plano δF_1 e δF_2 , mutuamente ortogonais.



Definimos a tensão normal:
$$\sigma_n = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A}$$

e as tensões de cisalhamento:
$$\tau_1 = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_1}{\delta A}; \quad \tau_2 = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_2}{\delta A}$$

Expressando as forças superficiais em função dessas tensões:



$$\delta F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_{sy} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_{sz} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

Portanto:

$$\delta \vec{F}_s = \delta F_{sx} \vec{i} + \delta F_{sy} \vec{j} + \delta F_{sz} \vec{k}$$

2.2 Relações entre tensões e deformações

Para fluidos Newtonianos incompressíveis:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

A pressão p é definida como o negativo da média das três tensões normais: $-p = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$.

Substituindo, por exemplo, na eq. na direção x , considerando μ constante:

$$\delta F_{sx} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_{sx} = \left\{ -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} \delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_{sx} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \delta x \delta y \delta z$$

Procedemos analogamente para as direções y e z , substituímos as expressões de aceleração e das forças nas equações do movimento, dividimos por $\delta x \delta y \delta z$ e obtemos as equações de Navier–Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

2.3 Coordenadas cilíndricas

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) =$$

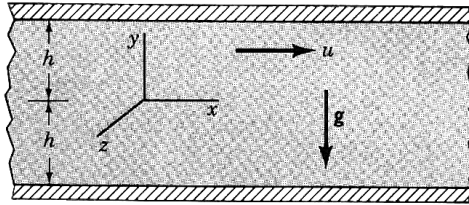
$$- \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$$

$$- \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

3 Soluções simples para escoamentos incompressíveis e viscosos

3.1 Escoamento laminar em regime permanente entre placas paralelas horizontais



Assumimos $v = w = 0$ e $\partial u / \partial z = 0$ para placas infinitas. A eq. da continuidade fornece $\partial u / \partial x = 0$. Como se trata de regime permanente, $\partial u / \partial t = 0$. Assim, as equações de Navier–Stokes se tornam

$$x : 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$y : 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g$$

$$z : 0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

Concluimos que a pressão não é função de z e integrando a equação em y obtemos $p = -\rho gy + f(x)$, ou seja, a pressão varia hidrostaticamente na direção y .

Integrando a eq. em y :
$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y + C_1$$

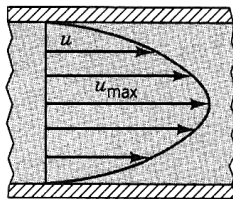
Integrando mais uma vez:
$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + C_1 y + C_2$$

Considerando que o canal tenha largura $2h$, e a origem do sistema de coordenadas esteja no meio do canal, as condições de contorno são $u = 0$ para $y = \pm h$. Assim:

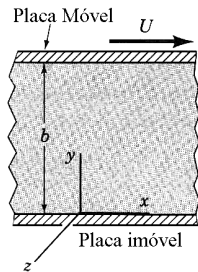
$$\left. \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) h^2 + C_1 h + C_2 \\ 0 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) h^2 - C_1 h + C_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} C_2 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) h^2 \\ C_1 = 0 \end{array}$$

Assim, o perfil é dado por

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - h^2) \quad [\text{perfil parabólico}]$$



3.2 Escoamento de Couette



Placa inferior fixa e superior se movendo com velocidade constante U . Como no caso anterior, assumimos $v = w = \partial u / \partial z = 0$, a eq. da continuidade fornece $\partial u / \partial x = 0$ e como se trata de regime permanente, $\partial u / \partial t = 0$. Chega-se portanto à mesma solução geral,

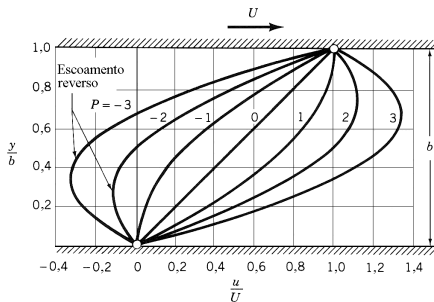
$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + C_1 y + C_2$$

porém com condições de contorno diferentes. Considerando um canal de largura b e origem do sistema de coordenadas na placa inferior, as condições são $u = 0$ para $y = 0$ e $u = U$ para $y = b$. Aplicando-as à

equação acima, determinamos C_1 e C_2 e chegamos à forma final

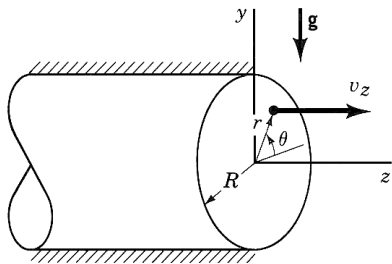
$$u = U \frac{y}{b} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - by)$$

O perfil de velocidade é função do parâmetro adimensional $P = -\frac{b^2}{2\mu U} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$. Quando $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $u = U \frac{y}{b}$.



3.3 Escoamento laminar em regime permanente em tubos

Considere um tubo de raio R . Admitimos escoamento paralelo à parede, $v_r = v_\theta = 0$, axissimétrico, $\partial v_z / \partial \theta = 0$ e permanente, $\partial v_z / \partial t = 0$. A equação da continuidade fornece $\partial v_z / \partial z = 0$; portanto $v_z = v_z(r)$. As equações de Navier–Stokes em coordenadas cilíndricas se reduzem a



$$r : 0 = -\rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\theta : 0 = -\rho g \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$z : 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right]$$

Integrando a primeira equação, $p = -\rho g r \sin \theta + f_1(z) = -\rho g y + f_1(z)$.

Ou seja, a pressão varia hidrostáticamente na seção transversal e $\partial p/\partial z$ não é função de r ou θ . Derivando a equação na direção z em relação a z e lembrando que $\partial v_z/\partial z = 0$, conclui-se que $\partial p/\partial z$ também não é função de z . Portanto $\partial p/\partial z$ é constante.

Integrando a eq. da direção z em relação a r :
$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) r^2 + C_1$$

Integrando novamente:
$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

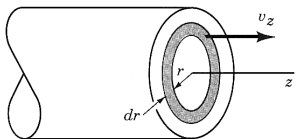
Condições de contorno:

- Velocidade finita no centro do tubo ($r = 0$) $\rightarrow C_1 = 0$
- $v_z = 0$ para $r = R \rightarrow C_2 = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2$

O perfil de velocidades é: $v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) (r^2 - R^2)$ [perfil parabólico].

Como $\partial p / \partial z$ é constante, $\partial p / \partial z = -\Delta p / L$, onde Δp é a queda de pressão que ocorre ao longo de um comprimento L de tubo.

Vazão: $dQ = v_z(2\pi r)dr \Rightarrow Q = 2\pi \int_0^R v_z r dr$



$$Q = \frac{\pi}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \int_0^R (r^3 - rR^2) dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu L}$$

Velocidade média: $\bar{V} = \frac{Q}{A_t} = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{D^2 \Delta p}{32\mu L}$

Velocidade máxima (centro do tubo, $r = 0$): $v_{\max} = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = 2\bar{V}$

Tensão de cisalhamento: $\tau = \mu \frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) r$ [perfil linear]