LCE0216
Introdução à Bioestatística Florestal

3. Probabilidade

Profa. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio

Monitor: Silvio Gomes

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Universidade de São Paulo

Piracicaba, 12 de março de 2020

Probabilidade

Probabilidade

Medida de incerteza em termos de escala numérica.

- Início: estratégias de apostas em jogos de azar;
- Desenvolvimento: século XX (teoria matemática);
- Embasamento teórico para as técnicas estatísticas a serem apresentadas.

Experimento Aleatório

Experimento Aleatório

São experimentos que, quando repetidos em condições similares, dão resultados, geralmente, diferentes.

- Anotar as espécies de aves que são capturadas numa rede-neblina armada no sub-bosque de uma floresta nativa

Experimento Aleatório

Experimento Aleatório

São experimentos que, quando repetidos em condições similares, dão resultados, geralmente, diferentes.

- Anotar as espécies de aves que são capturadas numa rede-neblina armada no sub-bosque de uma floresta nativa

Experimento aleatório

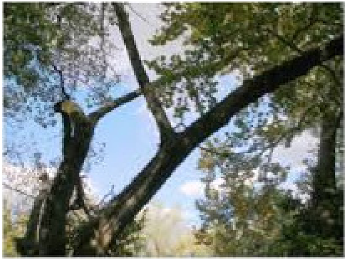
- Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima;

- Lançar duas moedas e observar as faces voltadas para cima;

Experimento aleatório

- Colocar 20 sementes em um germinador e contar, após determinado tempo, o número de sementes germinadas;

- Observar o número de árvores bifurcadas em uma amostra de tamanho n;



Experimento aleatório

- Coletar uma amostra de 100 tilápias de um lago e observar o número de fêmeas;

- Medir a produtividade de uma área de floresta de *Pinus* que recebeu adubação;

Experimento aleatório

- Medir a altura de uma árvore;

Espaço amostral

Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.
Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.
Notação: Ω.

Espaço amostral

Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.
Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.
Notação: Ω.

Os espaços amostrais podem ser **discretos** ou **contínuos**.

Espaço amostral

Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.
Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.
Notação: Ω.

Os espaços amostrais podem ser **discretos** ou **contínuos**.

- Um espaço amostral é discreto quando podemos enumerar todos os resultados do experimento;

Espaço amostral

Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.
Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.
Notação: Ω.

Os espaços amostrais podem ser **discretos** ou **contínuos**.

- Um espaço amostral é discreto quando podemos enumerar todos os resultados do experimento;
- Um espaço amostral é contínuo quando não podemos enumerar todos os resultados

Espaço Amostral

- Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima;

$$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$$

- Lançar duas moedas e observar as faces voltadas para cima;

$$\Omega = \{(\text{cara, cara}), (\text{cara, coroa}), (\text{coroa, cara}), (\text{coroa, coroa})\}$$

Espaço Amostral

- Colocar 20 sementes em um germinador e contar, após determinado tempo, o número de sementes germinadas;

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 20\}$$

- Observar o número de árvores bifurcadas em uma amostra de tamanho n;

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Espaço Amostral

- Coletar uma amostra de 100 tilápias de um lago e observar o número de fêmeas;
- Medir a produtividade de uma área de floresta de *Pinus* que recebeu adubação;

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 100\}$$

$$\Omega = (15, 45)\text{m}^3\text{ha}^{-1}$$

Espaço Amostral

- Medir a altura de uma árvore;

$$\Omega = (0, 6)\text{metros}$$

Eventos

Evento

Os eventos são subconjuntos do espaço amostral Ω, ou seja, são conjuntos dos resultados de um experimento.
Notação: $A,\ B,\ C, \ldots$

Eventos

Exemplos:

- Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15
- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%
- Observar árvores com altura superior a 3 metros
- Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

Eventos

Exemplos:

- Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

- Observar árvores com altura superior a 3 metros

- Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

Eventos

Exemplos:

- Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

$$B = (80, 100]\%$$

- Observar árvores com altura superior a 3 metros

- Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

Eventos

Exemplos:

- Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

$$B = (80, 100]\%$$

- Observar árvores com altura superior a 3 metros

$$C = (3, 6)\text{metros}$$

- Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

Eventos

Exemplos:

- Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15

$$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

$$B = (80, 100]\%$$

- Observar árvores com altura superior a 3 metros

$$C = (3, 6)\text{metros}$$

- Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

$$D = (3, 6)\text{metros}$$

Eventos

- **Evento certo**: $A = \Omega$.

- **Evento impossível**: $A = \emptyset$.

Eventos

- **Evento certo**: $A = \Omega$.

  Colocar 20 sementes no germinador e observar 20 sementes ou menos germinadas.

- **Evento impossível**: $A = \emptyset$.

Eventos

- **Evento certo**: $A = \Omega$.

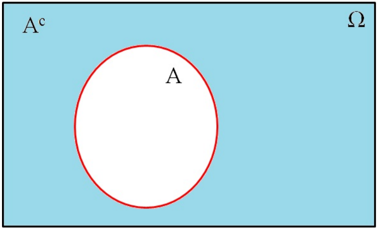
  Colocar 20 sementes no germinador e observar 20 sementes ou menos germinadas.

- **Evento impossível**: $A = \emptyset$.

  Colocar 20 sementes no germinador e observar mais do que 20 sementes germinadas.

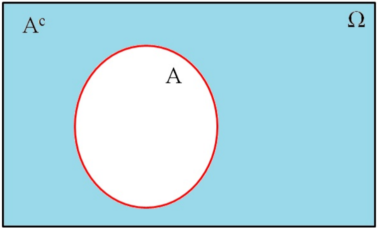
Eventos

- **Evento complementar**: O complementar de um evento A é o conjunto de pontos amostrais que não pertencem a A. Notação: $\bar{A}$ ou A^c.



Eventos

- **Evento complementar**: O complementar de um evento A é o conjunto de pontos amostrais que não pertencem a A. Notação: $\bar{A}$ ou A^c.

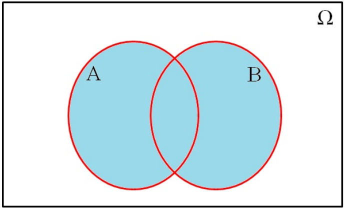


A = Observar o número de sementes germinadas maior do que ou igual a 15.
A^c = Observar o número de sementes germinadas menor do que 15.

Eventos

União

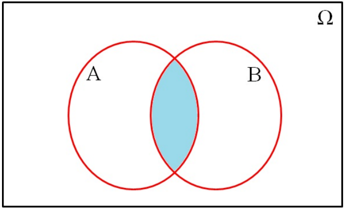
A **união** de dois eventos A e B é o conjunto de todos os elementos amostrais que estão em A, em B ou em ambos.
Notação: $A \cup B$.



Eventos

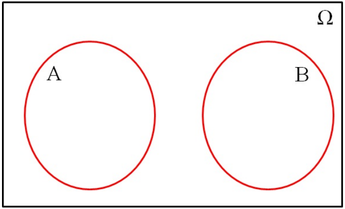
Interseção

A **interseção** de dois eventos A e B é o conjunto de todos os elementos amostrais que estão em A e estão em B.
Notação: $A \cap B$.



Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos são mutuamente exclusivos se eles não têm elementos amostrais em comum, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$, ou ainda, se eles não podem ocorrer simultaneamente.



Eventos

Exemplo: Considere o experimento lançamento de dois dados e a observação dos números obtidos. Considere ainda os seguintes eventos:

> A: Soma dos valores igual a 7;
>
> B: Resultado do primeiro dado igual a 6;
>
> C: Os resultados nos dois dados são iguais;
>
> D: Soma nos dois dados é 2;

Espaço amostral.

Eventos

Exemplo: Considere o experimento lançamento de dois dados e a observação dos números obtidos. Considere ainda os seguintes eventos:

> A: Soma dos valores igual a 7;
>
> B: Resultado do primeiro dado igual a 6;
>
> C: Os resultados nos dois dados são iguais;
>
> D: Soma nos dois dados é 2;

Espaço amostral.

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

Exemplo: Considere o experimento lançamento de dois dados e a observação dos números obtidos. Considere ainda os seguintes eventos:

A: Soma dos valores igual a 7;

B: Resultado do primeiro dado igual a 6;

C: Os resultados nos dois dados são iguais;

D: Soma nos dois dados é 2;

Espaço amostral.

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

Relacionar os elementos dos eventos A, B e C.

Eventos

- A: Soma dos valores igual a 7

Eventos

- A: Soma dos valores igual a 7

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\color{red}{(1,6)},\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\color{red}{(2,5)},(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),\color{red}{(3,4)},(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),\color{red}{(4,3)},(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),\color{red}{(5,2)},(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ \color{red}{(6,1)},(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

Eventos

- B: Resultado do primeiro dado igual a 6

Eventos

- B: Resultado do primeiro dado igual a 6

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Eventos

- C: Os resultados nos dois dados são iguais

Eventos

- C: Os resultados nos dois dados são iguais

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

- D: Soma nos dois dados é 2

Eventos

- D: Soma nos dois dados é 2

$$\Omega = \Big\{ \color{red}{(1,1)}, (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \Big\}$$

$$D = \{(1,1)\}$$

Eventos

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$D = \{(1,1)\}$$

- Quais eventos são mutuamente exclusivos?

- Relacionar os elementos dos eventos:
  - $A \cap B$
  - $A \cap C$
  - $B \cup D$

Eventos

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$D = \{(1,1)\}$$

- Quais eventos são mutuamente exclusivos?

  A e C, A e D e B e D.

- Relacionar os elementos dos eventos:
  - $A \cap B$
  - $A \cap C$
  - $B \cup D$

Eventos

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$D = \{(1,1)\}$$

- Quais eventos são mutuamente exclusivos?

  A e C, A e D e B e D.

- Relacionar os elementos dos eventos:
  - $A \cap B$

    $A \cap B = \{(6,1)\}$
  - $A \cap C$
  - $B \cup D$

Eventos

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$D = \{(1,1)\}$$

- Quais eventos são mutuamente exclusivos?
  A e C, A e D e B e D.
- Relacionar os elementos dos eventos:
  - $A \cap B$
    $A \cap B = \{(6,1)\}$
  - $A \cap C$
    $A \cap C = \emptyset$
  - $B \cup D$

Eventos

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$
$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$D = \{(1,1)\}$$

- Quais eventos são mutuamente exclusivos?

  A e C, A e D e B e D.

- Relacionar os elementos dos eventos:
  - $A \cap B$

    $A \cap B = \{(6,1)\}$
  - $A \cap C$

    $A \cap C = \emptyset$
  - $B \cup D$

    $B \cup D = \{(1,1),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

Definições

Definição Clássica

Seja $A \subset \Omega$, então

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{\text{número de resultados favoráreis}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

- Os resultados são equiprováveis;
- O espaço amostral é discreto e finito

Exemplo: No lançamento de dois dados honestos (resultados equiprováveis), calcular a probabilidade dos seguintes eventos:

A: Soma dos valores igual a 7;

B: Resultado do primeiro dado igual a 6;

C: Os resultados nos dois dados são iguais;

D: Soma nos dois dados é 2;

- A: Soma dos valores igual a 7

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),{\color{red}(1,6)},\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),{\color{red}(2,5)},(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),{\color{red}(3,4)},(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),{\color{red}(4,3)},(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),{\color{red}(5,2)},(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ {\color{red}(6,1)},(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

- A: Soma dos valores igual a 7

$$
\begin{aligned}
\Omega = \Big\{ & (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),{\color{red}(1,6)},\\
& (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),{\color{red}(2,5)},(2,6),\\
& (3,1),(3,2),(3,3),{\color{red}(3,4)},(3,5),(3,6),\\
& (4,1),(4,2),{\color{red}(4,3)},(4,4),(4,5),(4,6),\\
& (5,1),{\color{red}(5,2)},(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\
& {\color{red}(6,1)},(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \Big\}
\end{aligned}
$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = 0,17$$

Definições

- B: Resultado do primeiro dado igual a 6

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ \color{red}{(6,1)},\color{red}{(6,2)},\color{red}{(6,3)},\color{red}{(6,4)},\color{red}{(6,5)},\color{red}{(6,6)}\Big\}$$

Definições

- B: Resultado do primeiro dado igual a 6

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = 0,17$$

Definições

- C: Os resultados nos dois dados são iguais

$$\Omega = \Big\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \Big\}$$

Definições

- C: Os resultados nos dois dados são iguais

$$\Omega = \Big\{ {\color{red}(1,1)}, (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), {\color{red}(2,2)}, (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), {\color{red}(3,3)}, (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), {\color{red}(4,4)}, (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), {\color{red}(5,5)}, (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), {\color{red}(6,6)} \Big\}$$

$$P(C) = \frac{6}{36} = 0,17$$

Definições

- D: Soma nos dois dados é 2

$$\Omega = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\Big\}$$

Definições

- D: Soma nos dois dados é 2

$$\Omega = \Big\{ (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \Big\}$$

$$P(D) = \frac{1}{36} = 0,03$$

Definição Frequentista

Outro método de definir probabilidade é o da frequência relativa. Pode-se definir $P(A)$ como o limite da frequência relativa da ocorrência de A em n repetições independentes do experimento, com n tendendo ao infinito, ou seja,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(\text{número de ocorrências de } A \text{ em } n \text{ repetições do experimento})$$

Exemplo: Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipos AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigotos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes (n) e observar as frequências de cada um dos genótipos, tal como:

Definições

Exemplo: Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipos AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigotos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes (n) e observar as frequências de cada um dos genótipos, tal como:

- Para $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

Definições

Exemplo: Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipos AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigotos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes (n) e observar as frequências de cada um dos genótipos, tal como:

- Para $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

- Para $n = 100$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	29	0,29
Aa	48	0,48
aa	23	0,23
Total	100	1,00

Definições

Exemplo: Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipos AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigotos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes (n) e observar as frequências de cada um dos genótipos, tal como:

- Para $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

- Para $n = 100$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	29	0,29
Aa	48	0,48
aa	23	0,23
Total	100	1,00

- Para $n = 1000$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	263	0,263
Aa	495	0,495
aa	242	0,242
Total	1000	1,00

Definições

Exemplo: Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipos AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigotos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes (n) e observar as frequências de cada um dos genótipos, tal como:

- Para $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

- Para $n = 100$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	29	0,29
Aa	48	0,48
aa	23	0,23
Total	100	1,00

- Para $n = 1000$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	263	0,263
Aa	495	0,495
aa	242	0,242
Total	1000	1,00

- Para $n \to \infty$

Genótipo	Probabilidade
AA	0,25
Aa	0,50
aa	0,25
Total	1,00

Exemplo: Suponha que o quadro seguinte represente uma possível divisão dos alunos do primeiro ano, da ESALQ, no ano de 1998. Supondo que um aluno não pode estar matriculado em mais de um curso ao mesmo tempo.

	Curso			
Sexo	Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Definições

Exemplo: Suponha que o quadro seguinte represente uma possível divisão dos alunos do primeiro ano, da ESALQ, no ano de 1998. Supondo que um aluno não pode estar matriculado em mais de um curso ao mesmo tempo.

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Considere o experimento escolha ao acaso de um aluno do primeiro ano e verifique qual curso está cursando e a qual sexo pertence

Definições

Exemplo: Suponha que o quadro seguinte represente uma possível divisão dos alunos do primeiro ano, da ESALQ, no ano de 1998. Supondo que um aluno não pode estar matriculado em mais de um curso ao mesmo tempo.

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Considere o experimento escolha ao acaso de um aluno do primeiro ano e verifique qual curso está cursando e a qual sexo pertence
- Considere, ainda, os seguintes eventos:

H: ser do sexo masculino;
M: ser do sexo feminino;
A: estar cursando Engenharia Agronômica;
F: estar cursando Engenharia Florestal; e
E: estar cursando Economia Agroindustrial.

Definições

Sexo	Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
	Curso			
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
- $P(M)$
- $P(\Omega)$
- $P(A)$
- $P(F)$
- $P(E)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
- $P(\Omega)$
- $P(A)$
- $P(F)$
- $P(E)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
  $= \frac{60}{265} = 0,2264$
- $P(\Omega)$
- $P(A)$
- $P(F)$
- $P(E)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
  $= \frac{60}{265} = 0,2264$
- $P(\Omega)$
- $P(A)$
  $= \frac{200}{265} = 0,7547$
- $P(F)$
- $P(E)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
  $= \frac{60}{265} = 0,2264$
- $P(\Omega)$
- $P(A)$
  $= \frac{200}{265} = 0,7547$
- $P(F)$
  $= \frac{40}{265} = 0,1510$
- $P(E)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
  $= \frac{60}{265} = 0,2264$
- $P(\Omega)$
- $P(A)$
  $= \frac{200}{265} = 0,7547$
- $P(F)$
  $= \frac{40}{265} = 0,1510$
- $P(E)$
  $= \frac{25}{265} = 0,0943$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(H)$
  $= \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M)$
  $= \frac{60}{265} = 0,2264$
- $P(\Omega)$
  $= \frac{265}{265} = 1,0000$
- $P(A)$
  $= \frac{200}{265} = 0,7547$
- $P(F)$
  $= \frac{40}{265} = 0,1510$
- $P(E)$
  $= \frac{25}{265} = 0,0943$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$
- $P(H \cup M)$
- $P(H \cap M)$
- $P(M \cap E)$
- $P(H \cup A)$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$
  $= P(A) + P(F) =$
  $0,7547 + 0,1510 = 0,9057$
- $P(H \cup M)$
- $P(H \cap M)$
- $P(M \cap E)$
- $P(H \cup A)$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$
  $= P(A) + P(F) =$
  $0,7547 + 0,1510 = 0,9057$
- $P(H \cup M)$
  $= P(H) + P(M) =$
  $0,7736 + 0,2264 = 1$
- $P(H \cap M)$
- $P(M \cap E)$
- $P(H \cup A)$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Curso			Total
	Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$

  $= P(A) + P(F) =$
  $0,7547 + 0,1510 = 0,9057$
- $P(H \cup M)$

  $= P(H) + P(M) =$
  $0,7736 + 0,2264 = 1$
- $P(H \cap M)$

  $= 0$
- $P(M \cap E)$
- $P(H \cup A)$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$
  $= P(A) + P(F) = 0,7547 + 0,1510 = 0,9057$
- $P(H \cup M)$
  $= P(H) + P(M) = 0,7736 + 0,2264 = 1$
- $P(H \cap M)$
  $= 0$
- $P(M \cap E)$
  $= \frac{10}{265} = 0,0377$
- $P(H \cup A)$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	 Engenharia Florestal (F)	 Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$

  $= P(A) + P(F) = 0,7547 + 0,1510 = 0,9057$
- $P(H \cup M)$

  $= P(H) + P(M) = 0,7736 + 0,2264 = 1$
- $P(H \cap M)$

  $= 0$
- $P(M \cap E)$

  $= \frac{10}{265} = 0,0377$
- $P(H \cup A)$

  $= P(H) + P(A) - P(H \cap A) = 0,7736 + 0,7547 - \frac{160}{265} = 0,9245$
- $P(A^c)$

Definições

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F)$

  $= P(A) + P(F) = 0,7547 + 0,1510 = 0,9057$
- $P(H \cup M)$

  $= P(H) + P(M) = 0,7736 + 0,2264 = 1$
- $P(H \cap M)$

  $= 0$
- $P(M \cap E)$

  $= \frac{10}{265} = 0,0377$
- $P(H \cup A)$

  $= P(H) + P(A) - P(H \cap A) = 0,7736 + 0,7547 - \frac{160}{265} = 0,9245$
- $P(A^c)$

  $= P(F) + P(E) = 0,1510 + 0,0943 = 1 - 0,7547 = 0,2453$

Propriedades

Se A e B são dois eventos do espaço amostral Ω, então valem as seguintes regras básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Propriedades

Propriedades

Se A e B são dois eventos do espaço amostral Ω, então valem as seguintes regras básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então:

$P(A \cap B) =$

$P(A \cup B) =$

Propriedades

Se A e B são dois eventos do espaço amostral Ω, então valem as seguintes regras básicas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então:

$P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino (H)?

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino (H)?

$$P(H \mid F) = \frac{30}{40} = 0,7500$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Engenharia Agrônomica (A)	Curso Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade de ele estar cursando Engenharia Agronômica?

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade de ele estar cursando Engenharia Agronômica?

$$P(A \mid M) = \frac{40}{60} = 0,6667$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

$$P(F \mid M) = \frac{10}{60} = 0,1667$$

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	 Engenharia Florestal (F)	 Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino (H)?

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino (H)?

$$P(H \mid F) = \frac{30}{40} = 0,7500$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino (H)?

$$P(H \mid F) = \frac{30}{40} = 0,7500$$

$$= \frac{\frac{30}{265}}{\frac{40}{265}} = \frac{P(H \cap F)}{P(F)}$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade de ele estar cursando Engenharia Agronômica (A)?

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade de ele estar cursando Engenharia Agronômica (A)?

$$P(A \mid M) = \frac{40}{60} = 0,6667$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade de ele estar cursando Engenharia Agronômica (A)?

$$P(A \mid M) = \frac{40}{60} = 0,6667$$

$$= \frac{\frac{40}{265}}{\frac{60}{265}} = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

$$P(F \mid M) = \frac{10}{60} = 0,1667$$

Probabilidade condicional e independência

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

$$P(F \mid M) = \frac{10}{60} = 0,1667$$

$$= \frac{\frac{10}{265}}{\frac{60}{265}} = \frac{P(F \cap M)}{P(M)}$$

Definição

Dados dois eventos quaisquer, A e B, sendo $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A dado B, como sendo:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definição

Dados dois eventos quaisquer, A e B, sendo $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A dado B, como sendo:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observação:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Regra do Produto

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(B) \times P(A \mid B) \\
&= P(A) \times P(B \mid A)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**.

Considere os seguintes eventos:

- B_1: sair bola branca na primeira extração
- B_2: sair bola branca na segunda extração
- P_1: sair bola preta na primeira extração
- P_2: sair bola preta na segunda extração

Exemplo: Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**.

Considere os seguintes eventos:

- B_1: sair bola branca na primeira extração
- B_2: sair bola branca na segunda extração
- P_1: sair bola preta na primeira extração
- P_2: sair bola preta na segunda extração

Os eventos B_1 e B_2 são independentes?

Probabilidade condicional e independência

Exemplo: Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**.

Considere os seguintes eventos:

- B_1: sair bola branca na primeira extração
- B_2: sair bola branca na segunda extração
- P_1: sair bola preta na primeira extração
- P_2: sair bola preta na segunda extração

Os eventos B_1 e B_2 são independentes?

Os eventos P_1 e P_2 são independentes?

Exemplo: Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**.
Considere os seguintes eventos:

- B_1: sair bola branca na primeira extração
- B_2: sair bola branca na segunda extração
- P_1: sair bola preta na primeira extração
- P_2: sair bola preta na segunda extração

Os eventos B_1 e B_2 são independentes?

Os eventos P_1 e P_2 são independentes?

Os eventos P_1 e B_2 são independentes?

Exemplo: Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**.
Considere os seguintes eventos:

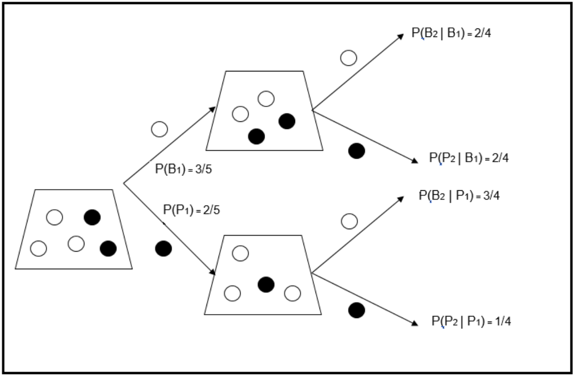
- B_1: sair bola branca na primeira extração
- B_2: sair bola branca na segunda extração
- P_1: sair bola preta na primeira extração
- P_2: sair bola preta na segunda extração

Pede-se:

(a) Calcular a probabilidade de sair bola branca na primeira extração e preta na segunda extração;

(b) Construir o espaço amostral e indicar as probabilidades associadas a cada um dos pontos amostrais.

Probabilidade condicional e independência



$$P(B_1) = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} P(B_2|B_1) = \frac{2}{4} \\ P(P_2|B_1) = \frac{2}{4} \end{cases}$$

$$P(P_1) = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} P(B_2|P_1) = \frac{3}{4} \\ P(P_2|P_1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

(a) Calcular a probabilidade de sair bola branca na primeira extração e preta na segunda extração;
$P(B_1) = \frac{3}{5}$ e $P(P_2 \mid B_1) = \frac{2}{4}$

$$P(B_1 \cap P_2) = P(B_1) \times P(P_2|B_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,30$$

(b) Construir o espaço amostral e indicar as probabilidades associadas a cada um dos pontos amostrais.

$$\Omega = \{(b,b),(b,p),(p,b),(p,p)\}$$

- $P[(b,b)] = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
- P[(b,p)] = $P(P_1 \cap B_2) = P(P_1)P(B_2|P_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
- $P[(p,b)] = P(P_2 \cap B_1) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$
- $P[(p,p)] = P(P_2 \cap P_1) = P(P_1)P(P_2|P_1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

Respostas:

- Os eventos B_1 e B_2 são independentes?
  Não, pois $P(B_2)$ depende de B_1 ter ocorrido ou não.

$$P(B_2|B_1) = \frac{2}{4} \neq P(B_2|P_1) = \frac{3}{4}$$

- Os eventos P_1 e P_2 são independentes?
  Não, pois $P(P_2)$ depende de P_1 ter ocorrido ou não.

$$P(P_2|B_1) = \frac{2}{4} \neq P(P_2|P_1) = \frac{1}{4}$$

- Os eventos P_1 e B_2 são independentes?
  Não, pois $P(B_2)$ depende de P_1 ter ocorrido ou não.

$$P(B_2|B_1) = \frac{2}{4} \neq P(B_2|P_1) = \frac{3}{4}$$

Note que:

$$P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(P_1 \cap B_2) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{3}{5} \neq P(B_2|B_1) = \frac{2}{4} \neq P(B_2|P_1) = \frac{3}{4}$$

$$P(P_2) = P(B_1 \cap P_2) + P(P_1 \cap P_2) = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{4}{5} \neq P(P_2|B_1) = \frac{2}{4} \neq P(P_2|P_1) = \frac{1}{4}$$

Exercício: Consideremos o mesmo caso anterior, porém **com reposição** da primeira bola extraída antes da extração da segunda bola.

- Os eventos B_1 e B_2 são independentes?
- Os eventos P_1 e P_2 são independentes?
- Construa o espaço amostral e indicar as probabilidades associadas a cada um dos pontos amostrais.

Exercício: Consideremos o mesmo caso anterior, porém **com reposição** da primeira bola extraída antes da extração da segunda bola.
Calcule as seguintes probabilidades:

- $P(B_2)$
- $P(P_2)$
- $P(B_2 \mid B_1)$
- $P(B_2 \mid P1)$
- $P(P_2 \mid B_1)$
- $P(P_2 \mid P_1)$

Construa o espaço amostral e indicar as probabilidades associadas a cada um dos pontos amostrais.

Probabilidade condicional e independência

Note que:

B_2 e B_1 são eventos independentes e que $P(B_2 \mid B_1) = P(B_2)$

B_2 e P_1 são eventos independentes e que $P(B_2 \mid P_1) = P(B_2)$

P_2 e B_1 são eventos independentes e que $P(P_2 \mid B_1) = P(P_2)$

P_2 e P_1 são eventos independentes e que $P(P_2 \mid P_1) = P(P_2)$

Generalizando,

se dois eventos, A e B, são independentes, temos que

$$P(A \mid B) = P(A) \qquad \text{ou} \qquad P(B \mid A) = P(B)$$

Pela regra do produto de probabilidades:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \times P(A \mid B) \\ &= P(A) \times P(B \mid A) \end{aligned}$$

Probabilidade condicional e independência

Independência

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Observação: Dois eventos são mutuamente exclusivos se, e somente se, $P(A \cap B) = 0$.

Aplicação de Probabilidade Condicional

Para que os exames laboratoriais auxiliem no diagnóstico de doenças é importante conhecer a capacidade dos exames em acertar o diagnóstico (ou seja, a sua acurácia). Duas medidas que auxiliam a mensurar a acurácia de um exame são:

- sensibilidade
- especificidade

Se se considerar a condição do indivíduo como sendo doente ou não doente e o resultado do exame como sendo positivo ou negativo, têm-se quatro combinações possíveis, como se segue.

Esquema padrão de síntese dos dados para verificação da qualidade de um teste clínico.

	Resultado do exame		
Status do paciente	Positivo (T_+)	Negativo (T_-)	
Doente (D_+)	a	b	$a+b$
Sadio (D_-)	c	d	$c+d$
Total	$a+c$	$b+d$	n

Aplicação de Probabilidade Condicional

Para definir os índices que descrevem o grau de confiabilidade de um teste, precisa-se trabalhar com os seguintes eventos:

- T_+ corresponde a exame positivo;
- T_- corresponde a exame negativo;
- D_+ corresponde a indivíduo portador da doença;
- D_- corresponde a indivíduo não portador da doença.

Tem-se que:

- a corresponde aos verdadeiros positivos (VP);
- b corresponde aos falsos negativos (FN);
- c corresponde aos falsos positivos (FP);
- d corresponde aos verdadeiros negativos (VN)

Aplicação de Probabilidade Condicional

- **Sensibilidade**: capacidade que o teste diagnóstico/triagem apresenta de detectar os indivíduos verdadeiramente positivos, ou seja, de diagnosticar corretamente os doentes. É definida como:
$$s = P(T_+|D_+) = \frac{a}{a+b},$$
ou seja, é a proporção de resultados positivos quando realizados em indivíduos com a doença (verdadeiros positivos).
- **Especificidade** - capacidade que o teste diagnóstico/triagem tem de detectar os verdadeiros negativos, isto é, de diagnosticar corretamente os indivíduos sadios. É definida como:
$$e = P(T_-|D_-) = \frac{d}{c+d},$$
ou seja, a proporção de resultados negativos quando realizados em indivíduos não portadores da doença (verdadeiros negativos).

Aplicação de Probabilidade Condicional

- **Valor preditivo positivo**: é a probabilidade da presença da doença quando o teste é positivo e é calculado como:

$$VP_+ = P(D_+|T_+) = \frac{a}{a+c}$$

.

- **Valor preditivo negativo**: é a probabilidade da ausência de doença quando o teste é negativo:

$$VP_- = P(D_-|T_-) = \frac{d}{b+d}$$

.

- **Acurácia**: é a probabilidade de o teste fornecer resultados corretos, ou seja, ser positivo nos doentes e negativo nos não doentes. Expresso de outra forma é a probabilidade dos verdadeiros positivos e verdadeiros negativos como uma proporção de todos os resultados. É calculada como:

$$Ac = \frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{a+d}{n}$$

Aplicação de Probabilidade Condicional

Exemplo: Um renomado centro tecnológico brasileiro desenvolveu um teste que identifica em poucos minutos a presença ou ausência do novo vírus Covid-19 no corpo do paciente. Caso a pessoa possua o vírus, a probabilidade é de 98,9% (sensibilidade). Sabendo que a incidência da doença na população é de 4%, qual a probabilidade de um exame qualquer resultar positivo?

O evento T_+ é o resultado positivo do exame, enquanto o evento V_+ é a pessoa examinada ser possuidora da doença, sendo seu complemento V_-, a pessoa não possuir a doença.

$$P(T_+|V_+) = \frac{P(T_+ \cap V_+)}{P(V_+)} = 0,989$$

$$P(T_+|V_-) = \frac{P(T_+ \cap V_-)}{P(V_-)} = 1 - 0,989 = 0,011$$

$$P(V_+) = 0.04 \Longrightarrow P(V_-) = 0,96$$

Logo,

$$P(T_+ \cap V_+) = P(V_+)P(T_+|V_+) = 0,04 \times 0,989 = 0,03956$$

$$P(T_+ \cap V_-) = P(V_-)P(T_+|V_-) = 0,96 \times 0,011 = 0,01056$$

$$P(T_- \cap V_+) = P(V_+)P(T_-|V_+) = 0,04 - 0,03956 = 0,00044$$

$$P(T_- \cap V_-) = P(V_-)P(T_-|V_-) = 0,96 - 0,01056 = 0,94944$$

	Resultado do exame		
Status do paciente	Positivo (T_+)	Negativo (T_-)	
Doente (V_+)	0,03956	0,00044	0,04
Sadio (V_-)	0,01056	0,94944	0,96
Total	**0,05012**	0,94988	1

Pode-se ver, também, que:

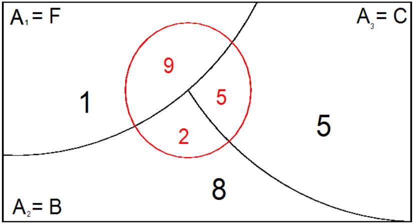
$$P(T_-|V_+) = \frac{0{,}00044}{0{,}04} = 0,011$$

$$P(T_-|V_-) = \frac{0{,}94944}{0{,}96} = 0,989$$

Teorema de Bayes

Exemplo

Temos três profissionais: um engenheiro florestal, um biólogo e um engenheiro civil. Cada um deles plantou dez mudas de álamos em vasos numa casa de vegetação. Sobreviveram nove das plantadas pelo engenheiro florestal, cinco pelo biólogo e duas pelo engenheiro civil. Dos trinta vasos, escolhe-se um ao acaso, e verifica-se se a muda sobreviveu. Se ela sobreviveu, qual é a probabilidade de ela ter sido plantada pelo engenheiro florestal?



Sejam os eventos:

- S: a muda sobreviver
- F: muda plantada pelo Engenheiro Florestal
- B: muda plantada pelo Biólogo
- C: Muda plantada pelo Engenheiro Civil

Teorema de Bayes

Suponha que os eventos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ formem uma partição do espaço amostral, Ω e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento A, conheçam-se as probabilidades condicionais, $P(A|C_i)$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Então, para qualquer j,

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i)}.$$

Teorema de Bayes

Exemplo

Temos três profissionais: um engenheiro florestal, um biólogo e um engenheiro civil. Cada um deles plantou dez mudas de álamos em vasos numa casa de vegetação. Sobreviveram nove das plantadas pelo engenheiro florestal, cinco pelo biólogo e duas pelo engenheiro civil. Dos trinta vasos, escolhe-se um ao acaso, e verifica-se se a muda sobreviveu. Se ela sobreviveu, qual é a probabilidade de ela ter sido plantada pelo engenheiro florestal?

Solução

$P(F) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

$P(S|F) = \frac{9}{10}$

$P(S|B) = \frac{5}{10}$

$P(S|C) = \frac{2}{10}$

$P(F|S) = \frac{P(F \cap S)}{P(F \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{9}{10}}{\frac{1}{3} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{10}} = \frac{9}{16}$

Teorema de Bayes

Exemplo

Uma água é contaminada se forem encontrados bacilos tipo A ou tipo B e C, simultaneamente. As probabilidade de se encontrarem bacilos tipo A, B e C são, respectivamente, 0,30, 0,20 e 0,80. Existindo bacilos do tipo A não existirão bacilos tipo B. Existindo bacilos tipo B, a probabilidade de existirem bacilos tipo C é reduzida à metade. Calcular:

- a probabilidade de ocorrer bacilos tipo B ou C ou ambos;
- a probabilidade de a água estar contaminada;
- sabendo que a água está contaminada, calcular a probabilidade de ela ter sido contaminada pelo bacilos do tipo B e C.

Aplicação do Teorema de Bayes

Exemplo: Um renomado centro tecnológico brasileiro desenvolveu um teste que identifica em poucos minutos a presença ou ausência do novo vírus Covid-19 no corpo do paciente. Caso a pessoa possua o vírus, a probabilidade é de 98,9% (sensibilidade). Sabendo que a incidência da doença na população é de 4%, qual a probabilidade de um exame qualquer resultar num "falso positivo", ou seja, a pessoa ser saudável mas o exame resultar em positivo?

O evento T_+ é o resultado positivo do exame, enquanto o evento V_+ é a pessoa examinada ser possuidora da doença, sendo seu complemento V_-, a pessoa não possuir a doença.

Já vimos que:

	Resultado do exame		
Status do paciente	Positivo (T_+)	Negativo (T_-)	
Doente (V_+)	$0,03956$	$0,00044$	$0,04$
Sadio (V_-)	$0,01056$	$0,94944$	$0,96$
Total	**0,05012**	$0,94988$	1

Aplicação do Teorema de Bayes

Já vimos, também, que

$P(V_+) = 0.04 \Longrightarrow P(V_-) = 0,96$

$P(T_+|V_+) = \frac{P(T_+ \cap V_+)}{P(V_+)} = 0,989$

$P(T_+|V_-) = \frac{P(T_+ \cap V_-)}{P(V_-)} = 1 - 0,989 = 0,011$

Então,

$P(V_-|T_+) = \frac{P(V_- \cap T_+)}{P(T_+)} = \frac{P(V_-)P(T_+|V_-)}{P(V_-)P(T_+|V_-) + P(V_+)P(T_+|V_+)} =$
$\frac{0{,}96 \times 0{,}011}{0{,}96 \times 0{,}011 + 0{,}04 \times 0{,}989} = \frac{0{,}01056}{0{,}01056 + (0{,}03956} = 0,2106943$

Este alto percentual é um resultado esperado já que a probabilidade de P(T_+) é de, aproximadamente, 5%, que já foi acima do valor de incidência da doença na população, portanto o diagnóstico do "falso positivo" é obviamente muito maior. Isto acontece porque a probabilidade de resultado positivo em pessoas saudáveis ainda é muito grande [P(T_+ | V_-) = 0,011] considerando a raridade da doença [P (V_+)=0,04]. Esse teste pode ser considerado confiável?

Exercícios

1. Dados dois eventos B e C, tais que, $P(B) = 0,6$, $P(C) = 0,3$ e $P(B \cap C) = 0,20$, verifique se B e C são independentes.
2. Uma urna contém 6 bolas azuis e 4 brancas, de onde são retiradas duas bolas ao acaso e sem reposição. Sejam os eventos A_1, sair bola azul na primeira extração, e B_2, sair bola branca na segunda extração. Pede-se:
   - Calcular as probabilidades de todos os possíveis resultados do experimento;
   - Calcular a probabilidade de sair bola branca na segunda extração;
   - Calcular a probabilidade de ter saído bola azul na primeira extração dado que saiu branca na segunda extração;
   - Verificar se A_1 e B_2 são eventos independentes.

3 Três fábricas fornecem equipamentos de precisão para o laboratório de química da universidade. Apesar de serem aparelhos de precisão, existe uma pequena chance de superestimação das medidas efetuadas. A tabela a seguir, apresenta as probabilidades associadas às categorias dos equipamentos produzidos em cada fábrica:

	Categoria		
Fábrica	Subestima	Exata	Superestima
I	0,010	0,98	0,010
II	0,005	0,98	0,015
III	0,000	0,99	0,01

Exercícios

As fábricas fornecem, respectivamente, 20%, 30% e 50% dos aparelhos utilizados. Escolhemos, ao acaso, um desses aparelhos e perguntamos a probabilidade de:

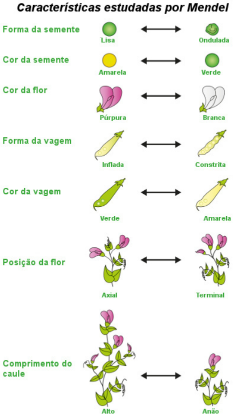
- Haver superestimação de medida?
- Não haver superestimação de medida?
- Dando medidas exatas, ter sido fabricado em III?
- Ter sido produzido por I, dado que não subestima as medidas?

Leis de Mendel

- Leis de Mendel: conjunto de fundamentos que explicam o mecanismo da transmissão hereditária (base dos mecanismos da hereditariedade) durante as gerações.
- O monge Gregor Mendel iniciou seus experimentos em torno de 1857, com ervilhas-de-cheiro (*Pisum sativum*) e aplicou a matemática em seus estudos. Reconhecidos como uma das maiores descobertas da Biologia o que fez com que ele fosse considerado o "Pai da Genética".
- A ervilha foi uma escolha importante para o sucesso de Mendel, pois é de fácil cultivo, apresenta várias características que podem ser estudadas, tem autofecundação, apresenta curto tempo de geração (ciclo reprodutivo curto), gera número grande de descendentes (alta produtividade).
- Mendel realizou cruzamentos entre diversas linhagens "puras", ou seja, plantas que, após (seis) sucessivas gerações, davam origem a plantas com as mesmas características.

Leis de Mendel

- Mendel realizava a polinização cruzada das plantas puras, transferindo o pólen de uma planta para outra (polinização cruzada ou hibridização), por exemplo, de retirar pólen de uma planta com semente amarela e depositá-lo sob o estigma de uma planta com sementes verdes.

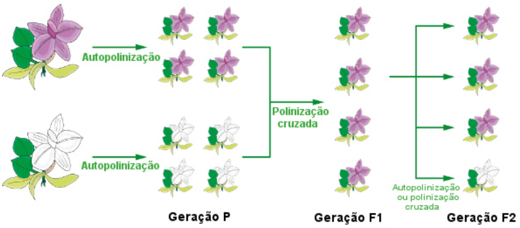


- Mendel analisou sete características que apresentavam duas formas distintas: forma da semente (lisa ou ondulada), cor da semente (amarela ou verde), cor da flor (púrpura ou branca), forma da vagem (inflada ou constrita), cor da vagem (verde ou amarela), posição da flor (axial ou terminal) e comprimento do caule (alto ou anão).
- Ele realizou diversos tipos de cruzamentos para verificar como as características eram herdadas ao longo das gerações.

Leis de Mendel

Primeira Lei de Mendel

- Os progenitores puros recebem a denominação de geração parietal ou geração P.
- Após cruzar a geração parietal, os descendentes dessa geração foram obtidos, os quais receberam o nome de primeira geração filial ou geração F1.
- O cruzamento entre indivíduos F1 levou à produção da segunda geração filial ou geração F2.



- Mendel realizou o cruzamento entre plantas puras que com flores púrpuras e plantas puras com flores de cor branca, gerando híbridos F1 100% com flores púrpuras, igual àquelas apresentadas pelas plantas puras. Isso levou à questão: o que aconteceu com o fator que determinava a cor branca das flores?
- Mendel não interrompeu seus trabalhos na geração F1, o que foi essencial para a compreensão do processo. Ele realizou, então, a autofecundação entre plantas F1 e teve uma grande surpresa: as plantas que geravam flores brancas reapareceram.
- Na nova linhagem, geração F2, surgiram aproximadamente, três plantas com flores na proporção 3:1 (púrpuras: branca).

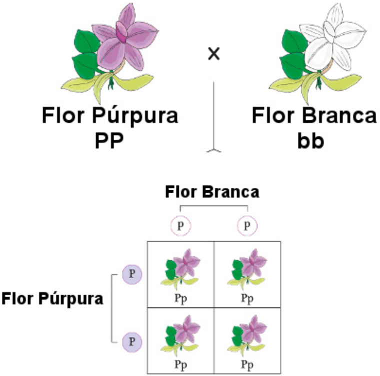
Leis de Mendel

Com os resultados obtidos, Mendel chegou às conclusões:

- Existem fatores responsáveis por uma determinada característica: existem fatores que determinam a cor branca e a cor púrpura. Esses fatores são, hoje, conhecidos como genes e as versões desses fatores são os alelos.
- Cada organismo herda dois alelos, um da mãe e outro do pai. Na geração F1, os descendentes apresentavam fatores para a flor branca e para a flor púrpura.
- Existem fatores dominantes e recessivos. Os alelos dominantes são capazes de mascarar o alelo recessivo. Na geração F1, o alelo para a cor púrpura era dominante e expressou-se, enquanto o alelo para a cor branca não era. Os alelos recessivos só se expressam quando estão aos pares.
- Cada indivíduo passa apenas um fator para cada característica em cada gameta, isto é, os alelos separam-se durante a formação dos gametas e apenas um alelo estará presente no gameta.
- Com isso, ele estabeleceu as suas Leis, que ficaram conhecidas por Genética Mendeliana.

Leis de Mendel

Primeira lei de Mendel ou Lei da Segregação: As características dos indivíduos são determinadas por pares de fatores, os quais se separam na formação dos gametas, indo apenas um fator para cada gameta.

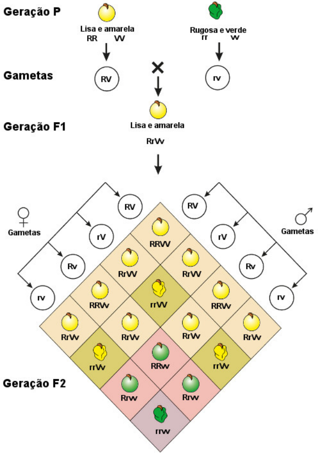


- Note que as flores púrpuras apresentam genótipo (composição genética) PP, enquanto a branca apresenta genótipo pp. Como os alelos se separam na formação dos gametas e se combinam na fecundação, pode-se perceber que, após o cruzamento da geração P, tem-se que 100% dos descendentes têm genótipo Pp. Como o fator P é dominante sobre p, as plantas apresentam em sua totalidade a cor púrpura.
- A Primeira Lei de Mendel aplica-se para o estudo de uma única característica.

Resultados dos Cruzamentos Monoíbridos de Mendel

Linhagens Parentais	Prole F1	Proporção
Plantas altas × Plantas anãs	787 : 277	2,84:1
Sementes lisas × sementes rugosas	5474 : 1850	
Sementes amarelas × sementes verdes	6022 : 2001	
Flores púrpuras × flores brancas	705 : 224	
Vagens infladas× vagens constritas	882 : 299	
Vagens verdes× vagens amarelas	428 : 152	
Flores axiais × flores terminais	651 : 207	

Segunda Lei de Mendel ou Lei da Segregação Independente dos Genes: Os pares de fatores para duas ou mais características segregam-se de forma independente na formação dos gametas.



- Mendel ainda queria saber como ocorria a transmissão de duas ou mais características em simultâneo.
- Ele cruzou plantas com sementes amarelas e lisas com plantas de sementes verdes e rugosas.
- Mendel esperava que a geração F_1 teria 100% de sementes amarelas e lisas, pois essas características apresentam caráter dominante.
- Fez, então, autofecundação da geração F1, pois imaginava que iriam surgir sementes verdes e rugosas, nas proporções 9:3:3:1

Leis de Mendel

Resultados observados e esperados na geração F2 do experimento de Mendel, envolvendo os genes para cor e textura de sementes de ervilha.

	Observado		Esperado	
Fenótipos F2	Número	Proporção	Número	Proporção
Amarela, lisa	315			
Verde, lisa	108			
Amarela, rugosa	101			
Verde, rugosa	32			
Total	556			