

aula 06

torção



ZEA 0566

Resistência dos Materiais



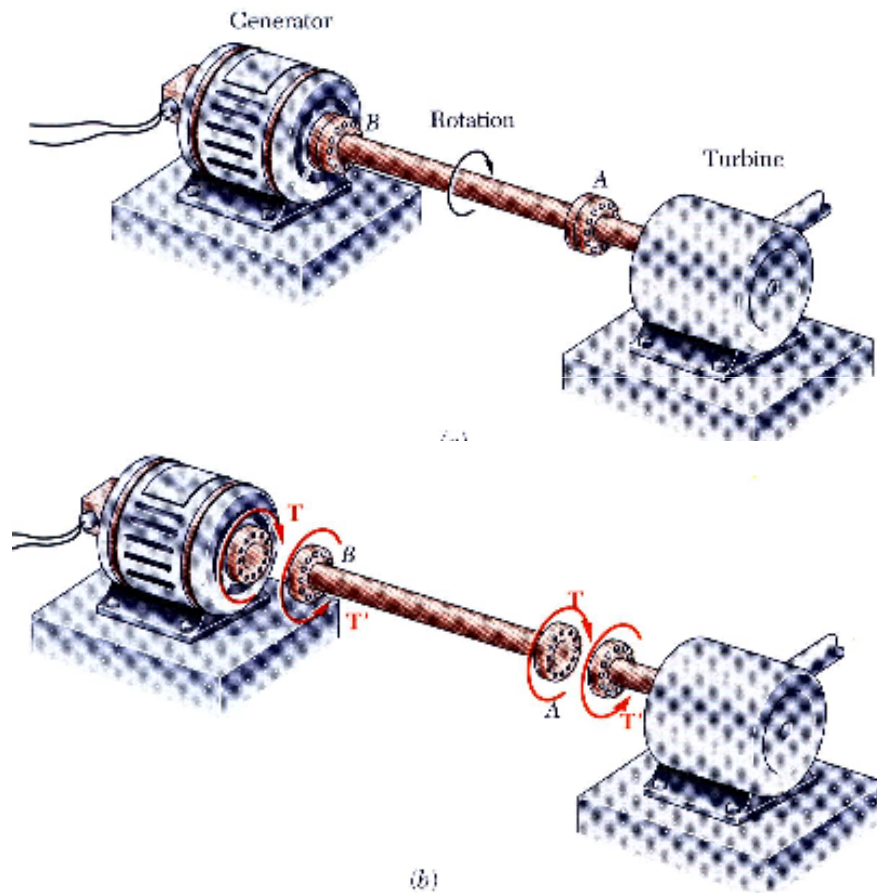
Prof. João Adriano Rossignolo

Prof. Holmer Savastano Júnior

Torção

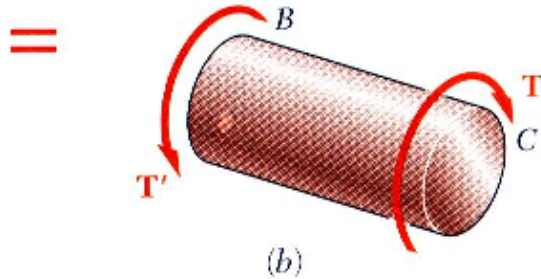
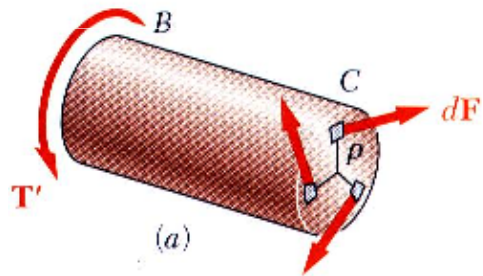
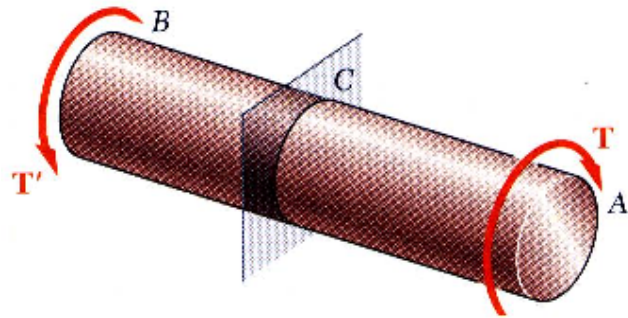
- ✓ Esforços internos de torção
- ✓ Equação matemática para cálculo das tensões tangenciais
- ✓ Distribuição das tensões tangenciais nos corpos solicitados
- ✓ Ângulo de torção
- ✓ Momento polar de Inércia

Torção em Eixos de Seção Circular



- A turbina exerce sobre o eixo de transmissão o momento torçor T .
- O eixo transmite o momento T ao gerador.
- O gerador reage, exercendo sobre o eixo um momento igual e contrário T' .

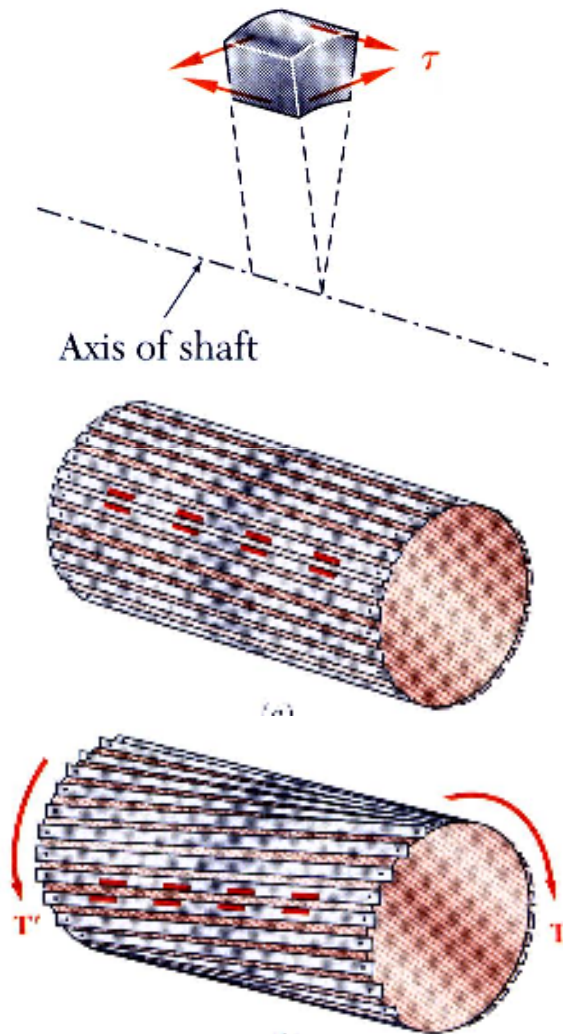
Análise das Tensões num Eixo



- O momento torçor T tem a mesma intensidade que a soma dos momentos dF , em relação ao centro:

$$T = \int \rho \, dF = \int \rho (\tau \, dA)$$

Análise das Tensões num Eixo



- O momento torçor produz tensões tangenciais nas faces perpendiculares ao eixo da barra.
- Condições de equilíbrio requerem a existência de tensões tangenciais nas duas faces formadas pelos planos que passam pelo eixo.
- Considerando o eixo constituído por lâminas finas, verifica-se o deslizamento das lâminas devido à aplicação de momentos, com a mesma intensidade e sentidos opostos, nas extremidades da peça.

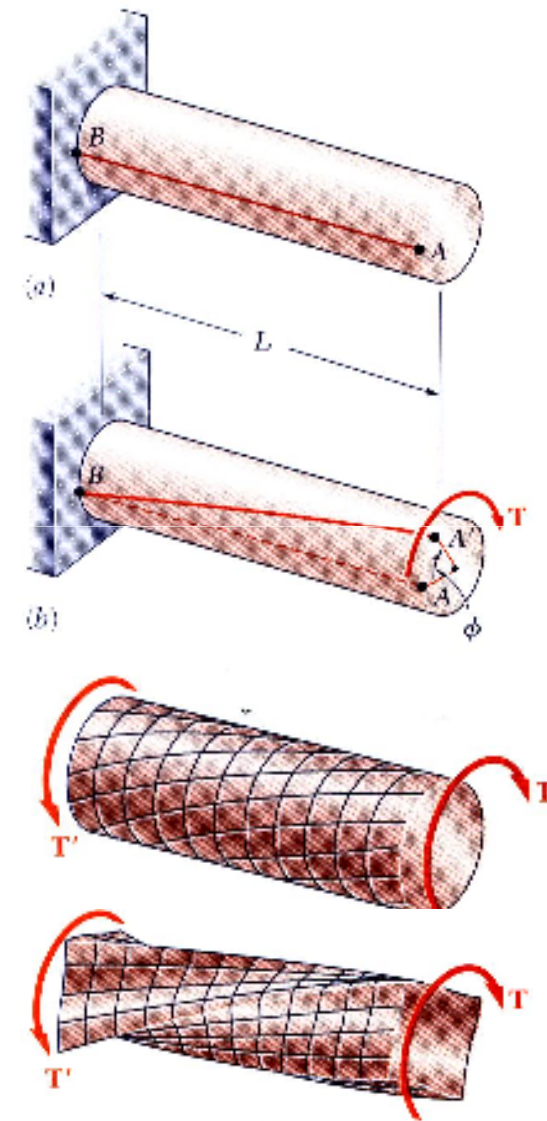
Deformações nos Eixos de Secção Circular

- O ângulo de torção é proporcional a T e ao comprimento L do eixo:

$$\phi \propto T$$

$$\phi \propto L$$

- Nos eixos circulares, as secções transversais mantêm-se planas e não se deformam.

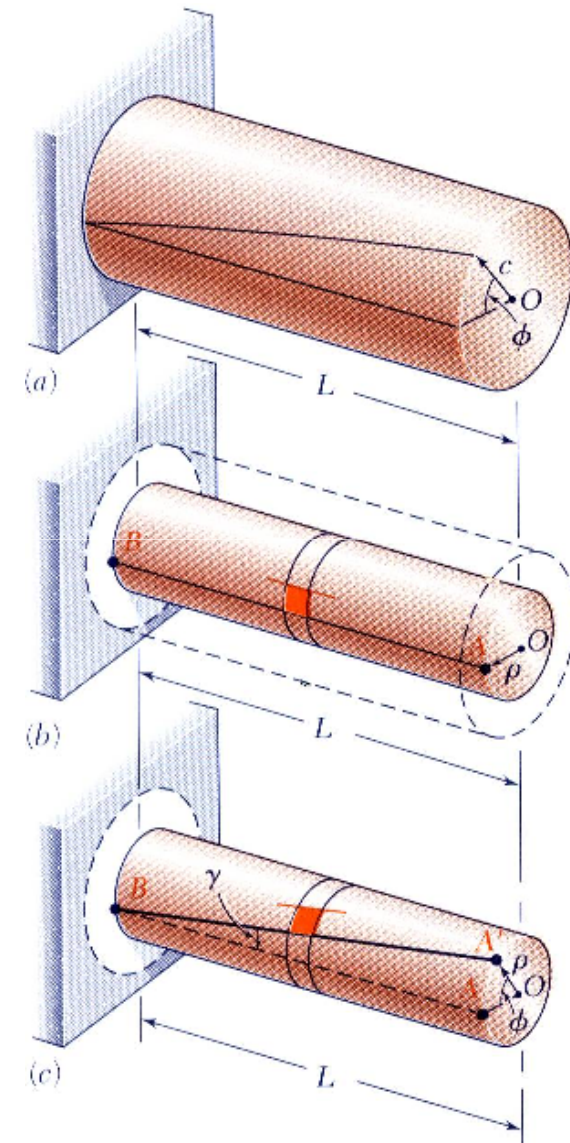


Deformações nos Eixos de Secção Circular

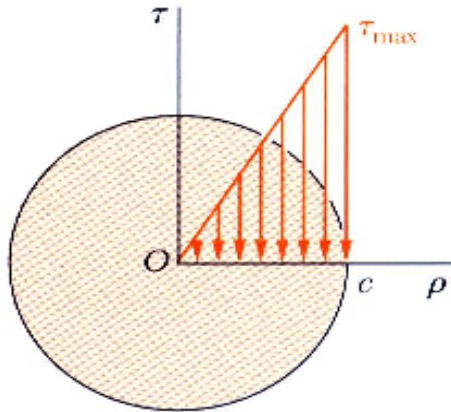
- A distorção numa barra circular varia linearmente com a distância ao eixo da barra.

$$L\gamma = \rho\phi \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

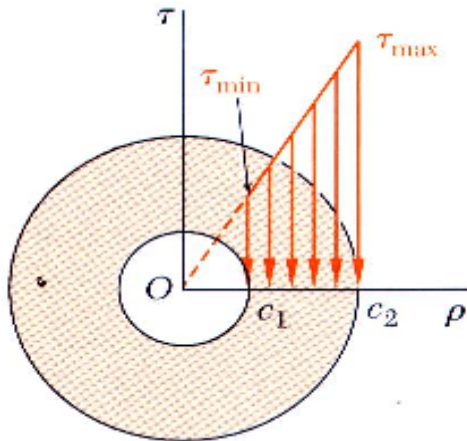
$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}$$



Tensões no Regime Elástico



$$J = \frac{1}{2} \pi c^4$$



$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4)$$

Aplicando a lei de Hooke, $\tau = G\gamma$, vem:

(G = módulo de deformação transversal)

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$

A tensão tangencial varia linearmente com a distância ao eixo da barra.

- Fórmulas de torção no regime elástico:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

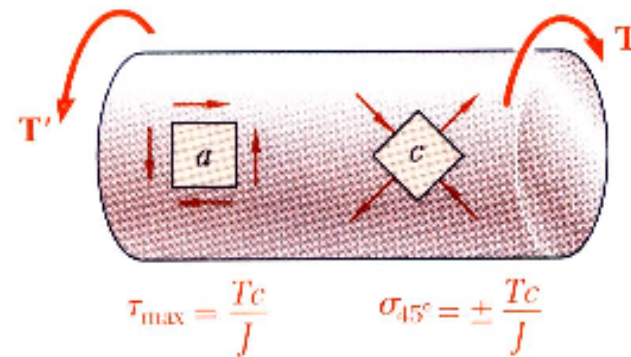
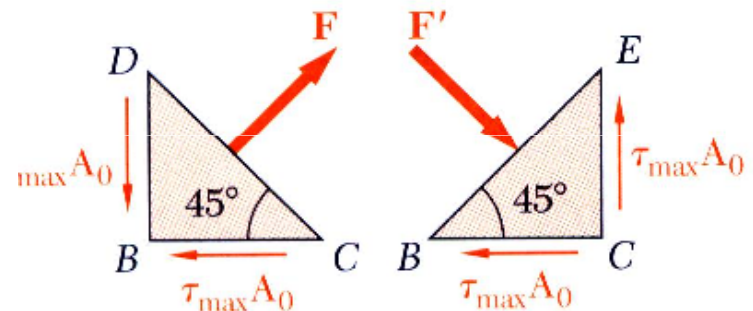
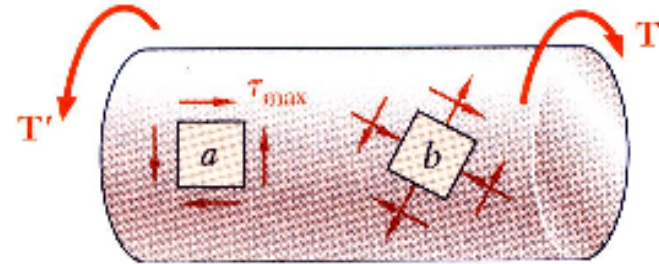
[J = momento de inércia polar]

Tensões no Regime Elástico

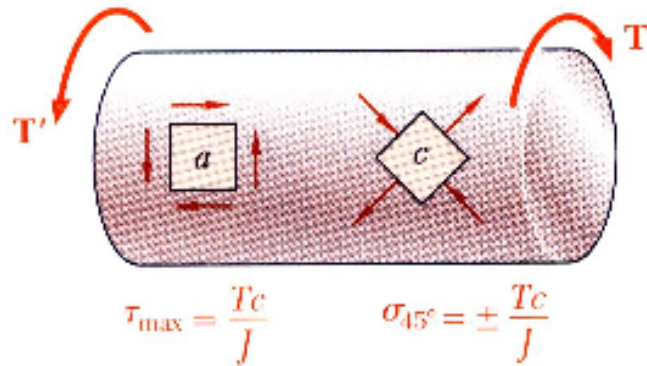
- Considerar um elemento que forme um ângulo de 45° com o eixo da barra,

$$F = 2(\tau_{\max} A_0) \cos 45 = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2}$$

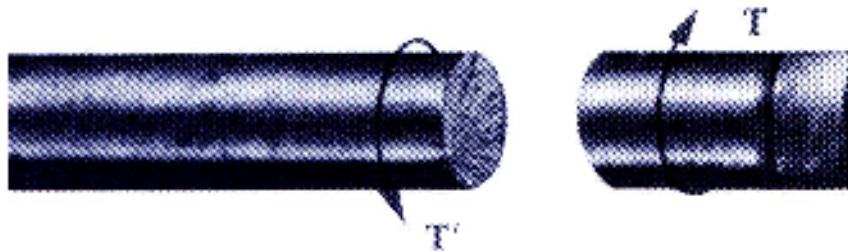
$$\sigma_{45^\circ} = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max}$$



Modos de Falha Torcionais



- Os materiais ductéis geralmente rompem por tensões tangenciais.



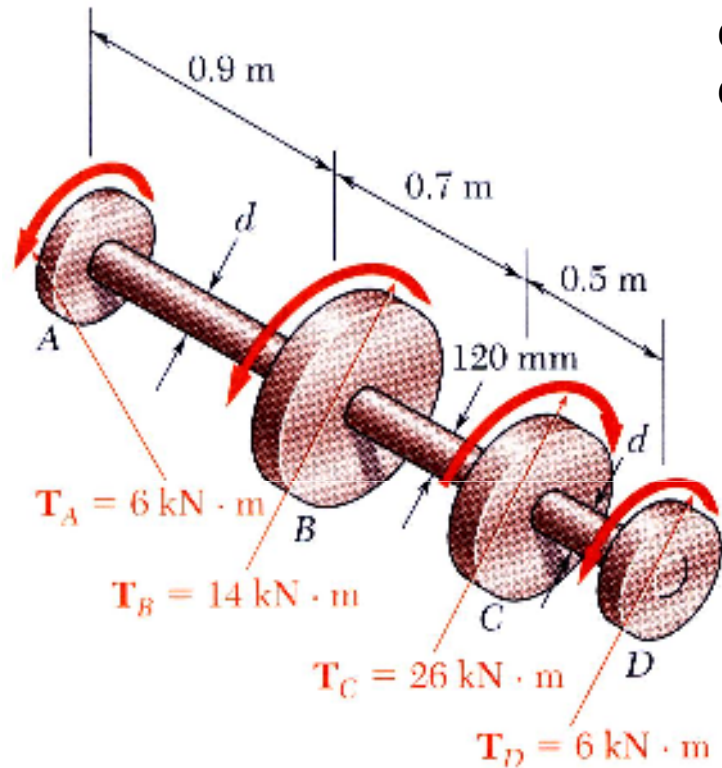
- Material dúctil.



- Material frágil.

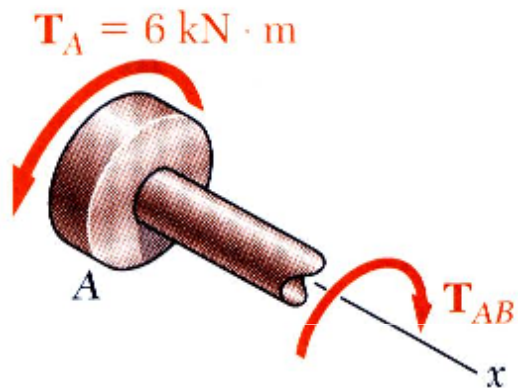
Exercício Resolvido 1

O eixo circular BC é oco e tem diâmetros de 90mm e 120mm, respectivamente interno e externo. Os eixos AB e CD são maciços, com diâmetro d . Determinar:



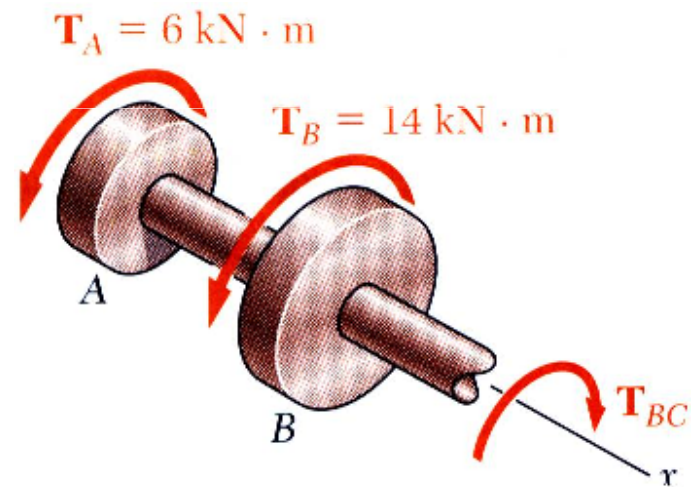
- O valor máximo e mínimo da tensão tangencial no eixo BC ;
- O diâmetro necessário nos eixos AB e CD , se a tensão admissível no material for de 65 MPa.

- Considerar secções transversais nos eixos AB e BC , e recorrer ao equilíbrio estático:



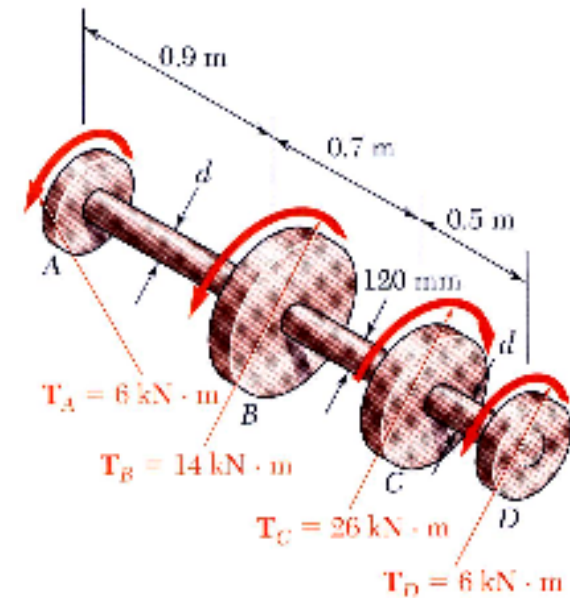
$$\sum M_x = 0 = (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{AB}$$

$$T_{AB} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m} = T_{CD}$$

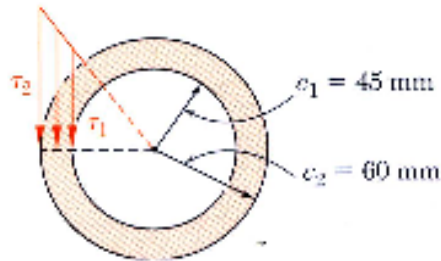


$$\sum M_x = 0 = (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) + (14 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{BC}$$

$$T_{BC} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



- Aplicar as fórmulas de torção no regime elástico, para determinar as tensões tangenciais no eixo *BC*:



$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(0.060)^4 - (0.045)^4]$$

$$= 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 86.2 \text{ MPa}$$

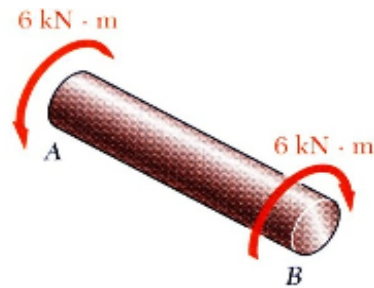
$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{\tau_{\min}}{86.2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}}$$

$$\tau_{\max} = 86.2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$

- Aplicar a fórmula de torção no regime elástico e determinar o diâmetro necessário:

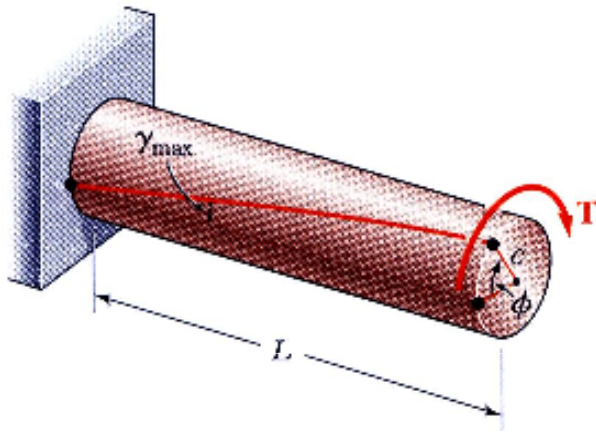


$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{\frac{\pi}{2}c^4} \quad 65 \text{ MPa} = \frac{6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{\frac{\pi}{2}c^3}$$

$$c = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 2c = 77.8 \text{ mm}$$

Ângulo de Torção no Regime Elástico

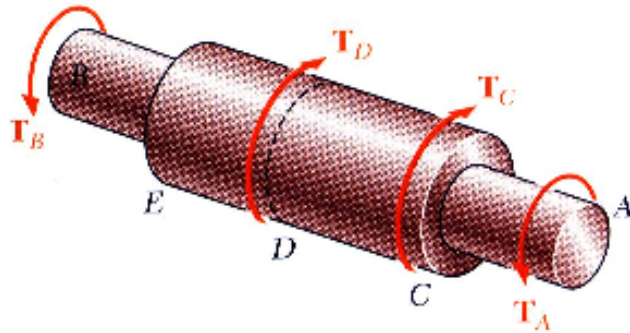


$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

- Aplicando a Lei de Hooke,

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$$

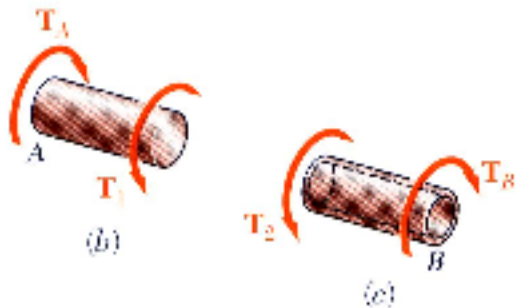
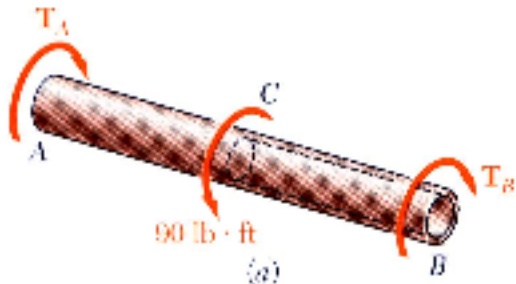
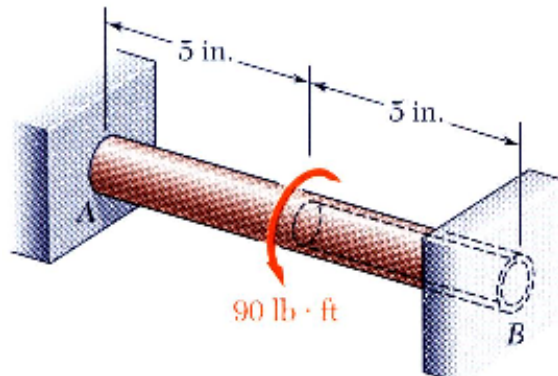
- Igualando as expressões e resolvendo em ordem ao ângulo,



$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

Eixos Estaticamente Indeterminados



- Dadas as dimensões e o momento torçor aplicado, determinar as reacções ao momento em A e B.

- A partir do diagrama de corpo livre,

$$T_A + T_B = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Conclui-se que o problema é estaticamente indeterminado.

- Dividir o eixo em duas secções, as quais devem ter deformações compatíveis,

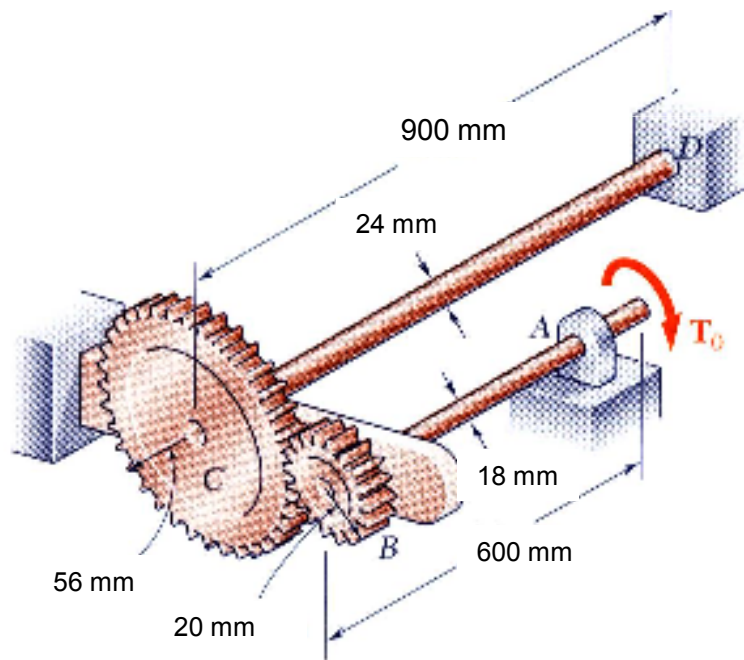
$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0 \quad T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

- Substituir na equação de equilíbrio inicial,

$$T_A + \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

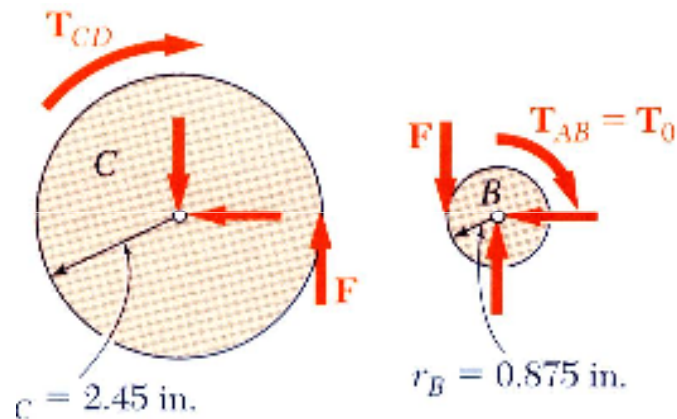
Exercício Resolvido 2

Dois eixos maciços são ligados por duas engrenagens como mostra a figura. Para uma tensão de cisalhamento admissível de 55MPa e $G = 80\text{MPa}$. Calcular:



- O maior momento torçor T_0 que pode ser aplicado à extremidade do eixo AB .
- O ângulo de torção da extremidade A do eixo AB .

- Procede-se ao equilíbrio estático dos dois veios de modo a obter o momento torçor no veio CD em função do momento torçor aplicado T :

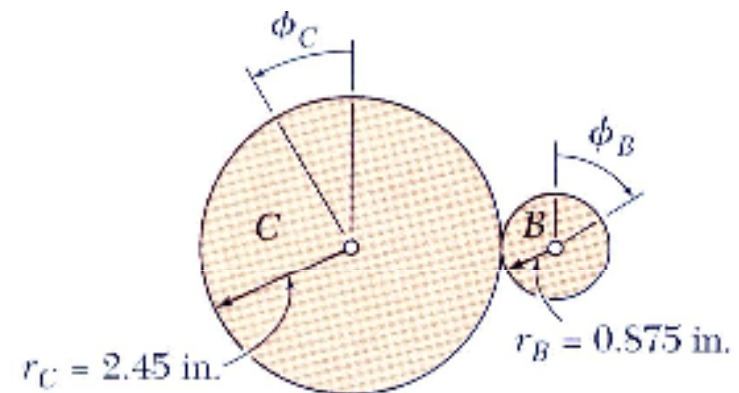


$$\sum M_B = 0 = F(0.875 \text{ in.}) - T_0$$

$$\sum M_C = 0 = F(2.45 \text{ in.}) - T_{CD}$$

$$T_{CD} = 2.8 T_0$$

- Relações cinemáticas de rotação das duas engrenagens:

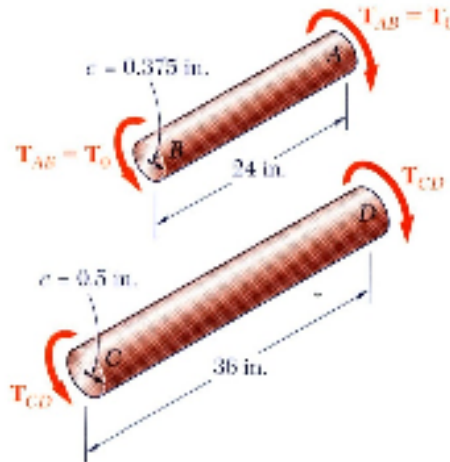


$$r_B \phi_B = r_C \phi_C$$

$$\phi_B = \frac{r_C}{r_B} \phi_C = \frac{2.45 \text{ in.}}{0.875 \text{ in.}} \phi_C$$

$$\phi_B = 2.8 \phi_C$$

- Cálculo do máximo momento torçor T_0 .



$$\tau_{\max} = \frac{T_{AB}c}{J_{AB}} \quad 8000 \text{ psi} = \frac{T_0(0.375 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.375 \text{ in.})^4}$$

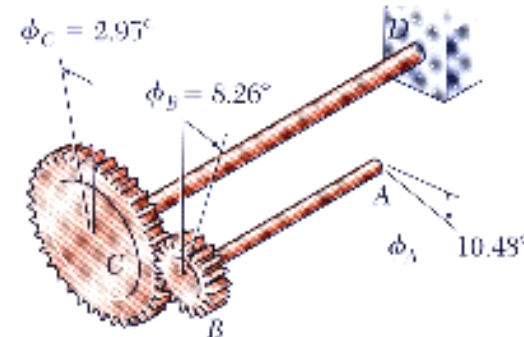
$$T_0 = 663 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{CD}c}{J_{CD}} \quad 8000 \text{ psi} = \frac{2.8 T_0(0.5 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.5 \text{ in.})^4}$$

$$T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

- Cálculo do ângulo de torção na extremidade A do eixo AB.



$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L}{J_{AB}G} = \frac{(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})(24 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.375 \text{ in.})^4(11.2 \times 10^6 \text{ psi})}$$

$$= 0.387 \text{ rad} = 2.22^\circ$$

$$\phi_{C/D} = \frac{T_{CD}L}{J_{CD}G} = \frac{2.8(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})(24 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.5 \text{ in.})^4(11.2 \times 10^6 \text{ psi})}$$

$$= 0.514 \text{ rad} = 2.95^\circ$$

$$\phi_B = 2.8\phi_C = 2.8(2.95^\circ) = 8.26^\circ$$

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 8.26^\circ + 2.22^\circ = 10.48^\circ$$

$$\phi_A = 10.48^\circ$$

Projecto de Eixos de Transmissão

- As principais especificações a serem consideradas são:

- potência;
- velocidade de rotação.

- O projectista deverá seleccionar materiais e dimensões adequadas, de modo a não exceder a tensão tangencial admissível.

- Determinar o momento torçor,

$$P = T\omega = 2\pi fT$$

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi f}$$

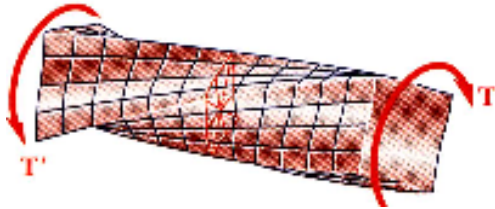
- Determinar a secção do eixo,

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2} c^3 = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (\text{eixos maciços})$$

$$\frac{J}{c_2} = \frac{\pi}{2c_2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (\text{eixos vazados})$$

Torção em Barras de Secção Não Circular



- As secções transversais de barras de secção não circular não permanecem planas.

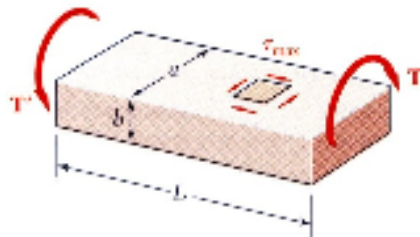
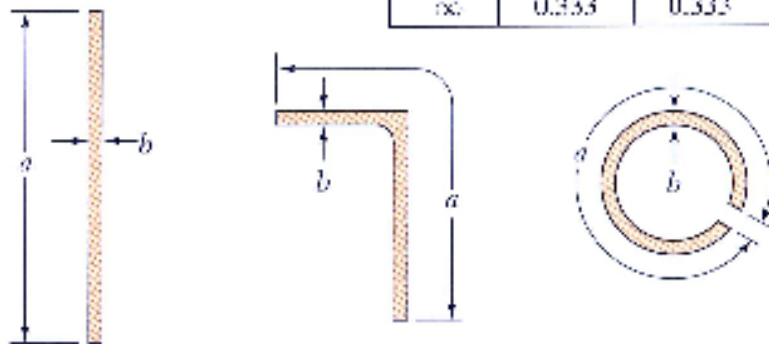


TABLE 3.1. Coefficients for Rectangular Bars in Torsion

a/b	c_1	c_2
1.0	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

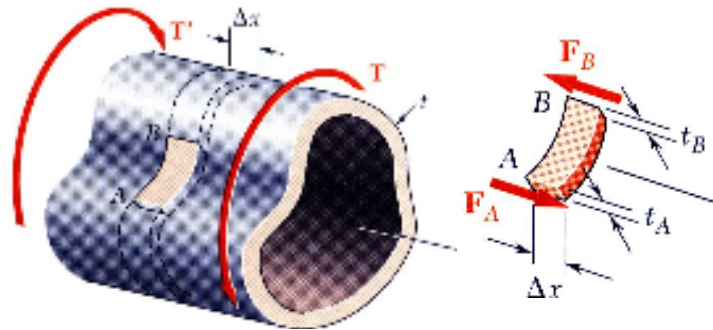
- Para barras de secção rectangular constante,

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 a b^2} \quad \phi = \frac{TL}{c_2 a b^3 G}$$



- Para valores elevados de a/b , a tensão tangencial máxima e o ângulo de torção são os mesmos que para uma barra de secção rectangular.

Tubos de Paredes Finas

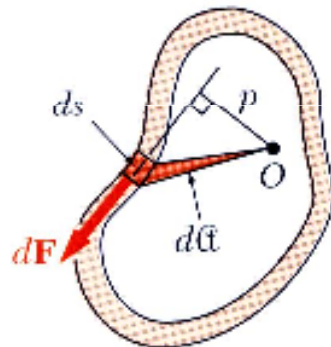


- Somando as forças aplicadas na porção AB , na direcção do eixo x ,

$$\sum F_x = 0 = \tau_A(t_A \Delta x) - \tau_B(t_B \Delta x)$$

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B = \tau t = q$$

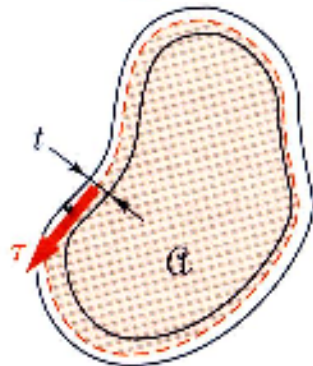
A tensão tangencial varia inversamente com a espessura.



$$dM_0 = p dF = p \tau(t ds) = q(p ds) = 2q dA$$

$$T = \oint dM_0 = \oint 2q dA = 2qA$$

$$\tau = \frac{T}{2tA}$$



- Ângulo de torção,

$$\phi = \frac{TL}{4A^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

Exercício de Esforços Internos de Torção

Para o carregamento indicado e considerando que os apoios A e B permitem ao eixo girar livremente, represente o diagrama de esforços internos de torção.

