INTRODUÇÃO À

RELATIVIDADE

AULA 9 - 31/03/2020

- Vetores e tensores de Minkowski
- Corrente e densidade: 4-corrente
- Eletromagnetismo e Relatividade
- O Tensor Eletromagnético
- **Leitura: Capítulos 1.8 a 1.10 do Carroll**

VETORES E TENSORES DE MINKOWSKI

- Vetores no espaço de Minkowski (4-vetores) se transformam do modo usual: $V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} V^{\nu}$

- Podemos conceber objetos ("tensores") tais como $S^{\mu\nu} = U^{\mu} P^{\nu}$, que se transformam como:

$$S^{\mu\nu} \ \rightarrow \ S'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \alpha} \Lambda^{\nu}_{\ \beta} S^{\alpha\beta}$$

- Ou então, objetos tais como $T_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu}$, que se transformam como:

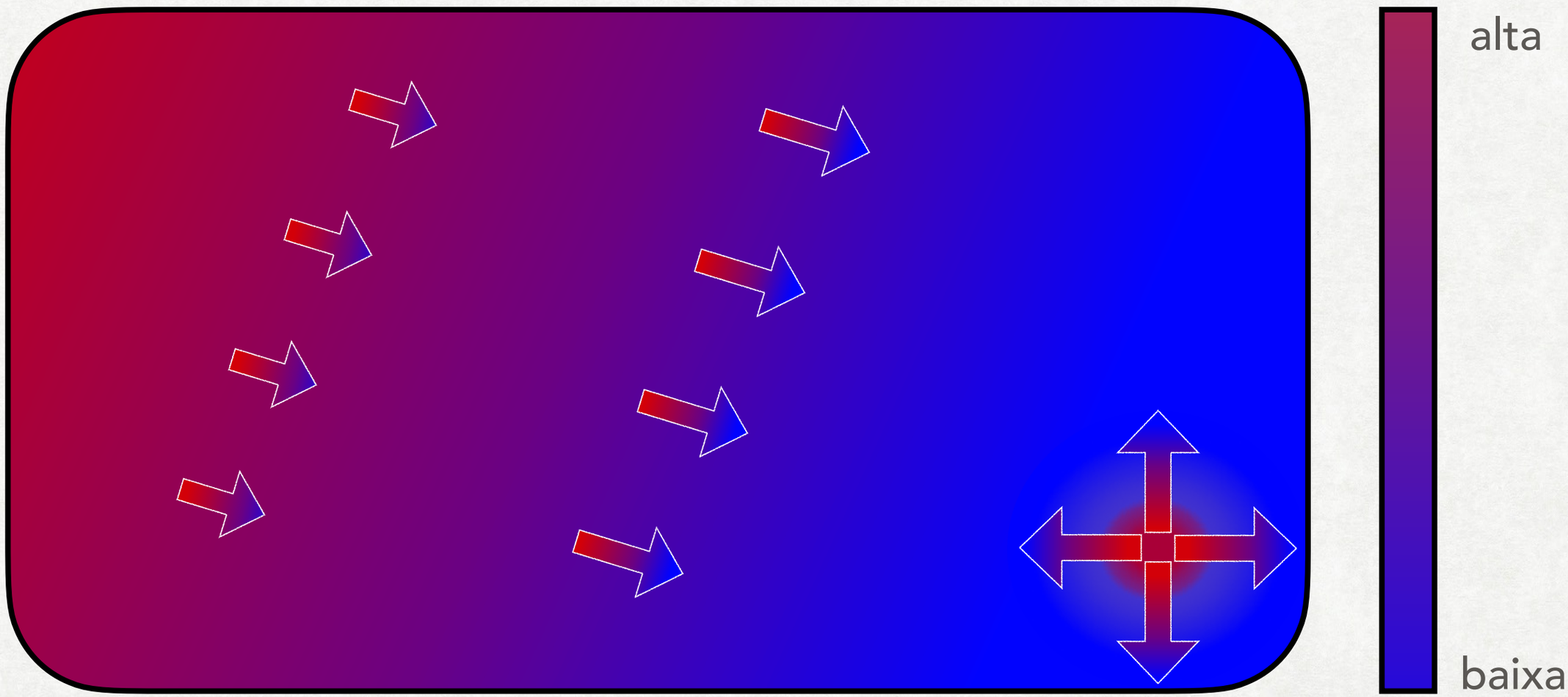
$$T_{\mu\nu} \ \rightarrow \ T'_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\ \mu} \Lambda^{\beta}_{\ \nu} T_{\alpha\beta}$$

- E não vamos nos esquecer dos escalares, tais como $q = \partial_{\mu} V^{\mu}$:

$$q \rightarrow q' \overset{!}{=} q$$

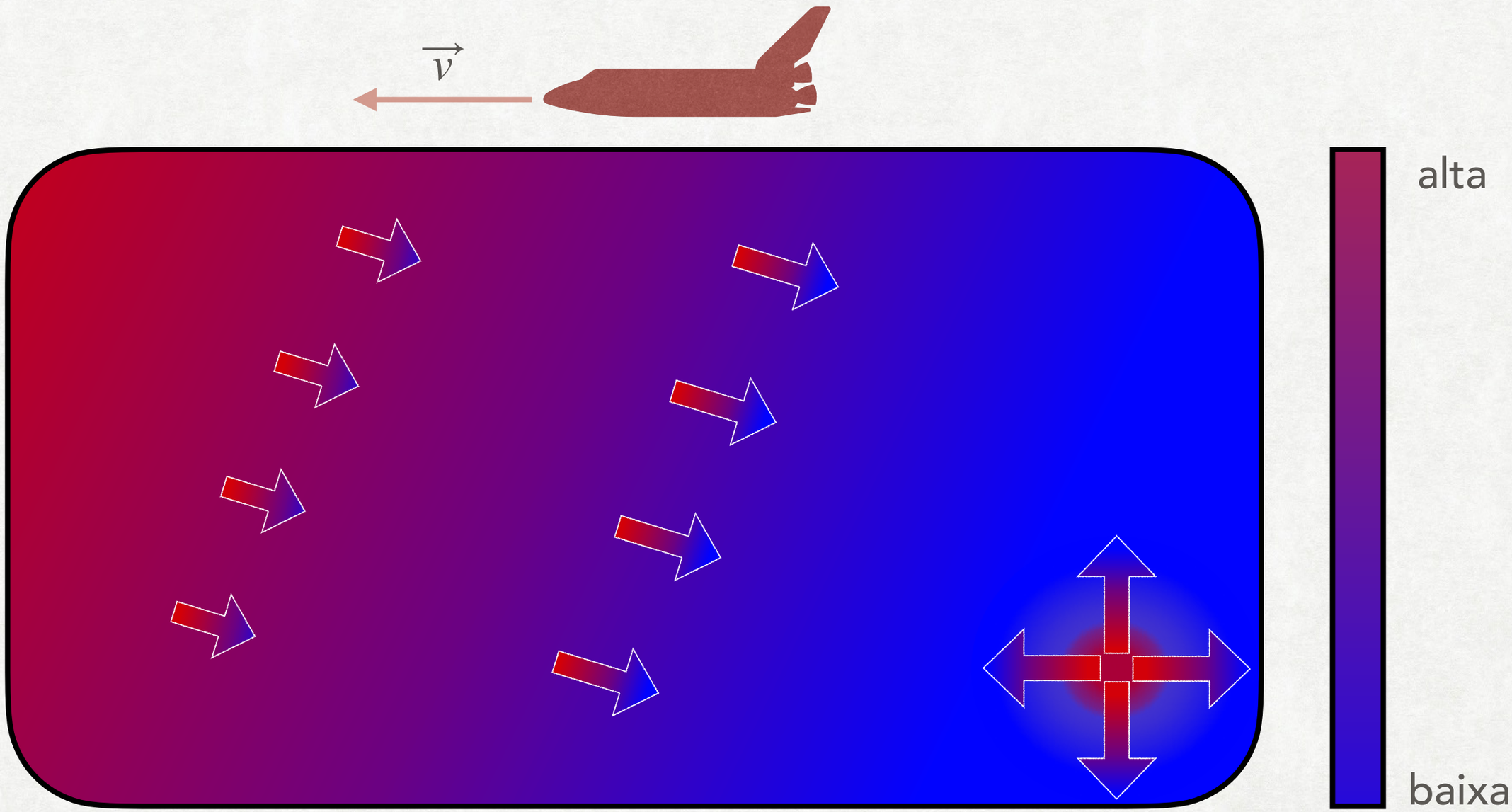
CORRENTES E DENSIDADES

- Podemos descrever distribuições de massas ou de cargas em termos de ***densidades*** e ***correntes***:



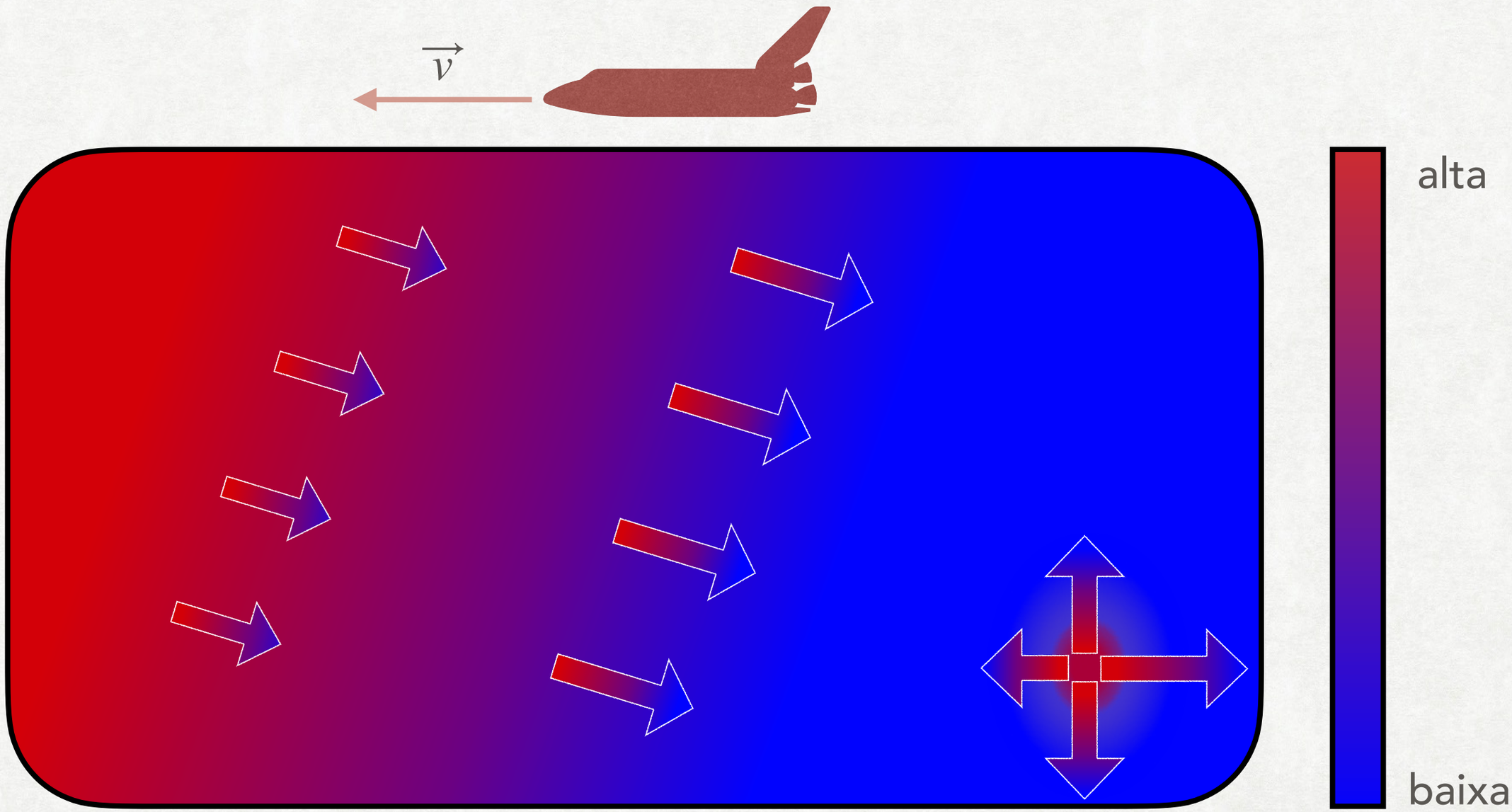
CORRENTES E DENSIDADES

- Mas como essas densidades e correntes se transformam?



CORRENTES E DENSIDADES

- Mas como essas densidades e correntes se transformam?



CORRENTES E DENSIDADES

- Vamos começar estabelecendo a relação entre as duas: a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{ou melhor:} \quad \partial_t \rho + \partial_i J^i = 0$$

- Agora fica claro que a equação acima pode na verdade ser expressa do seguinte modo:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \, ,$$

$r^0 = ct$!!!

- onde a 4-corrente é dada por:

$$J^\mu = \{ \rho \, c \, , \vec{J} \}$$

CORRENTES E DENSIDADES

- A 4-corrente é mais um 4-vetor que encontramos aqui:

4-velocidade $U^\mu = \dfrac{d\,r^\mu}{d\tau} = \gamma(V)\{c\,,\,\overrightarrow{V}\}$

4-momento $P^\mu = mU^\mu = \{E/c\,,\,\overrightarrow{P}\}$

4-corrente $J^\mu = \{\rho c\,,\,\overrightarrow{J}\}$

- Assim como a equação da continuidade fica simples e elegante,

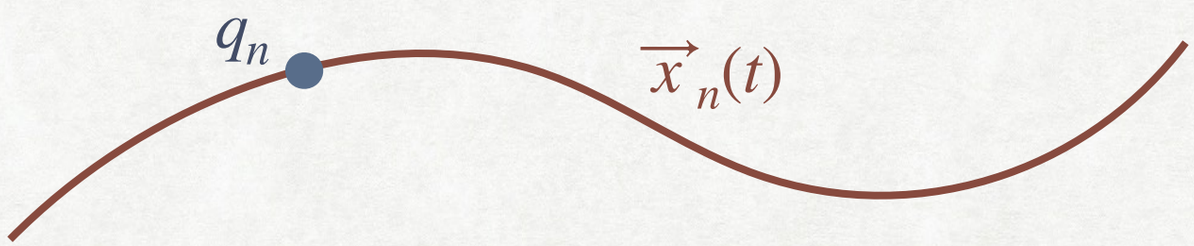
$\boxed{\partial_\mu J^\mu \;=\; 0}$,

- Note que poderíamos até escrever a equação acima como:

$\partial^\mu J_\mu \;=\; 0$, onde $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = \{-\partial_0\,,\,\overrightarrow{\nabla}\}$ e $J_\mu = \{-\rho c\,,\,\overrightarrow{J}\}$

CORRENTES E DENSIDADES

- De um modo mais concreto, podemos pensar em densidades de cargas e correntes como ***distribuições***

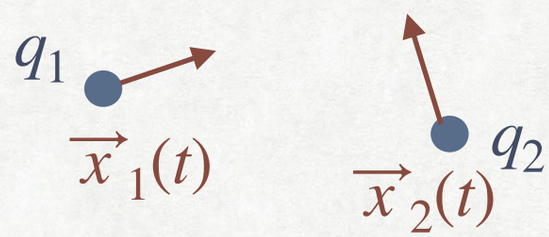


Densidade: $$\rho_n = q_n \delta^3[\vec{x} - \vec{x}_n(t)] = q_n \frac{dt}{dt} \delta^3[\vec{x} - \vec{x}_n(t)]$$

Corrente: $$\vec{J}_n = q_n \frac{d\vec{x}_n}{dt} \delta^3[\vec{x} - \vec{x}_n(t)]$$

CORRENTES E DENSIDADES

- Uma distribuição de cargas e correntes pode ser expressa de tal forma que as propriedades cinemáticas sejam expressas relativisticamente



$$\rho_n = q_n \frac{dt}{dt}\,\delta^3[\vec{x} - \vec{x}_n(t)] \qquad , \qquad \vec{J}_n = q_n \frac{d\vec{x}_n}{dt}\,\delta^3[\vec{x} - \vec{x}_n(t)]$$

$$\Rightarrow \quad J_n^\mu = q_n \frac{dx_n^\mu}{dt}\,\delta^3[\vec{x} - \vec{x}_n(t)]$$

- ***<u>Exercício</u>***: mostre que podemos escrever a 4-corrente como

$$J_n^\mu(x) \;=\; \int d\tau\, q_n\, U_n^\mu\, \delta^4[x - x_n(\tau)] \quad ,$$ onde aqui por simplicidade $x \to x^\alpha$, $x_n \to x_n^\alpha$

FUNÇÃO DELTA DE DIRAC EM 4D
<u>EXERCÍCIO 2</u>: *MOSTRE QUE ESSA FUNÇÃO É UM* **ESCALAR**

A EQUAÇÃO DE ONDA

- Uma das equações mais fundamentais da Física é a equação de onda:

$$\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right]\Psi=0$$

- Mas lembrando novamente que $r^0 = ct$ e $\vec{\nabla} \to \partial_i$,

$$\left[-\partial_0^2+\partial_i\partial_i\right]\Psi=0$$

- Ou seja, em termos da notação tensorial (ou "notação covariante") a equação de onda fica:

$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\Psi = 0$, ou simplesmente $\boxed{\partial^\mu\partial_\mu\Psi = 0}$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Vamos agora voltar ao Eletromagnetismo.
- No vácuo, as equações de Maxwell são (em ***unidades Gaussianas***):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_q$$

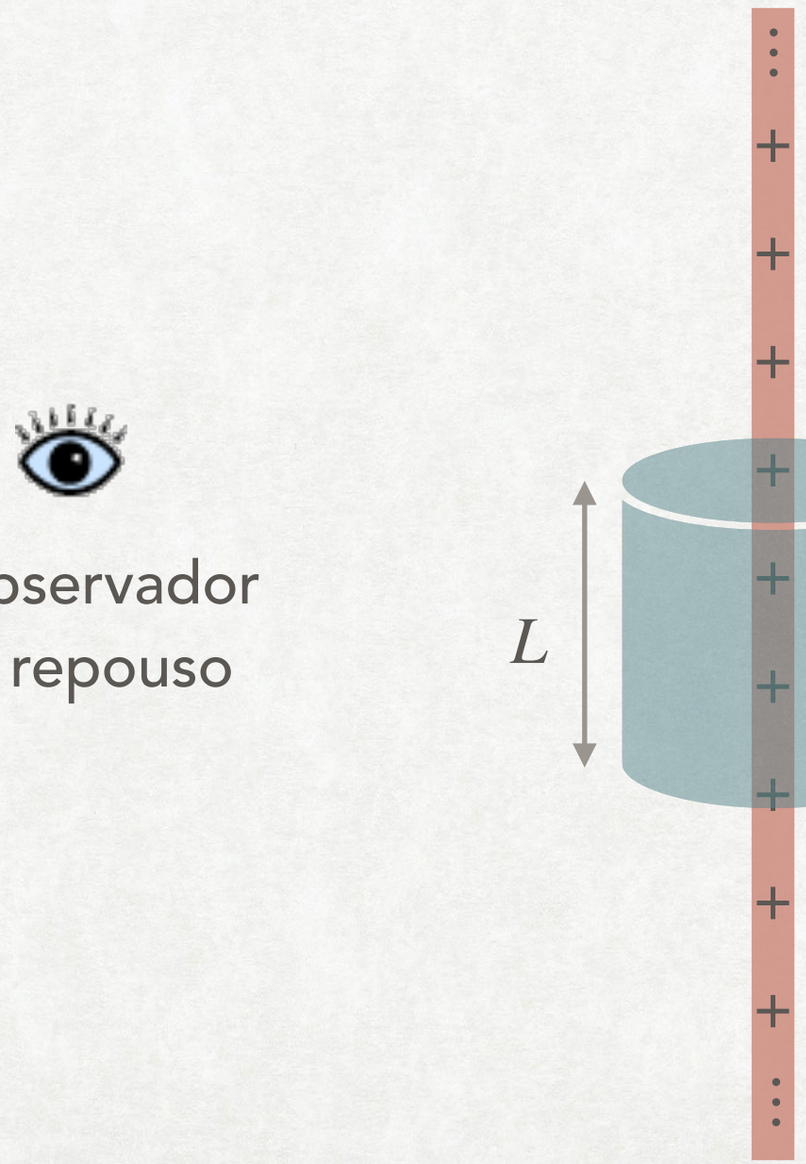
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_q$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Na aula passada vimos que um fio infinito com densidade linear de carga constante tem somente um campo **elétrico**



S: observador em repouso

$$\rho_q = \lambda\delta(x)\delta(y) \qquad \lambda = \frac{dq}{dz}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho_q \quad \Rightarrow \quad \int_{S(V)} d\vec{S}\cdot\vec{E} = 4\pi q_V$$

$$\vec{E} = E_\rho\,\hat{\rho}$$

$$d\vec{S} = 2\pi\rho\, dz\,\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi\,\rho\, L\, E_\rho = 4\pi\lambda\, L$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{E} = \frac{2\lambda}{\rho}\hat{\rho}}$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Esse mesmo fio infinito, quando visto por um observador em movimento:

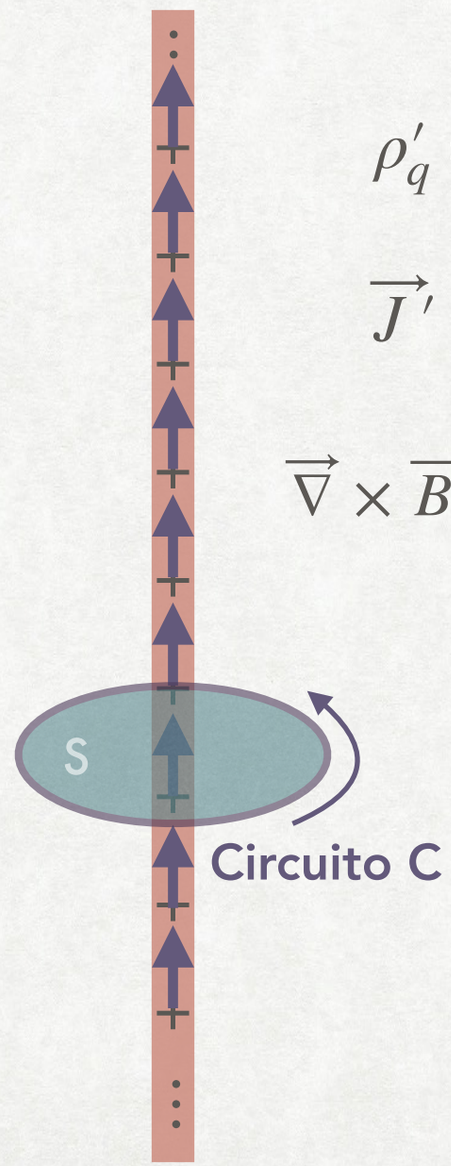
S': observador em movimento

* Note que as direções x, y , ou ρ, φ , não são afetadas pela transformação

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Esse mesmo fio infinito, quando visto por um observador em movimento (S'):

Observador S'



$$\rho'_q = \lambda' \delta(x)\delta(y) \qquad \lambda' = \frac{dq}{dz'}$$

$$\vec{J}' = \lambda' v\, \delta(x)\delta(y)\, \hat{z} \qquad I' = \lambda' v$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}' = \frac{4\pi}{c} \vec{J}' \quad \Rightarrow \quad \oint_{C(S)} d\vec{l} \cdot \vec{B}' = \frac{4\pi}{c} I'$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{B}' = \frac{2I'}{c\,\rho}\,\hat{\varphi}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{E}' = \frac{2\lambda'}{\rho}\,\hat{\rho}}$$

* Note que as direções x, y , ou ρ, φ , não são afetadas pela transformação

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Mas os dois referenciais se relacionam apenas por uma transformação de Lorentz — então os campos também deveriam se relacionar por algo assim...

S $\vec{E} \neq 0 \, , \vec{B} = 0$

S'

$\vec{E}' \neq 0 \, , \vec{B}' \neq 0$

Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são dois vetores em 3 dimensões, assim como $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$

Mas eles são campos ***diferentes!***
Como relacionar os dois dentro de uma **mesma transformação**?

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Para isso vamos voltar às equações de Maxwell,

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_q \\ &\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0 \end{aligned}} \quad , \quad \begin{aligned} &\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_q \\ &\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

- Vamos notar que algumas delas contém combinações de derivadas temporais e espaciais. *Interessante*...

- Além disso, note que tomando $\vec{\nabla} \cdot (\ldots)$ na *Lei de Ampère*, e combinando com $\partial_t(\ldots)$ na *Lei de Gauss*, temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\cancel{\vec{\nabla} \times \vec{B}} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_q\right] = -\frac{1}{c}\partial_t\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_q\right]$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Agora, vamos finalmente notar que tanto o campo elétrico quanto o campo magnético se relacionam com potenciais — o potencial eletrostático Φ, e o potencial-vetor $\overrightarrow{A}$:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \quad , \quad \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$

- Ou seja, os dois campos tridimensionais $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{B}$ na verdade podem ser reduzidos aos potenciais Φ e $\overrightarrow{A}$ ...

- Então, é como se esses potenciais fossem uma coisa só, um... 4-vetor!

$$\{\Phi\,,\overrightarrow{A}\} \rightarrow A^{\mu\,?}_{\mu\,?}$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Vamos então re-escrever as Equações de Maxwell em termos dos potenciais Φ e $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_q \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{1}{c}\partial_t \left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A} \right) = \rho_q$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\cancel{-\vec{\nabla}\Phi} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A} \right) + \frac{1}{c}\partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\cancel{\vec{\nabla} \times \vec{A}}) = 0$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Simplificando isso um pouco temos:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} + \vec{\nabla}\frac{1}{c}\partial_t\Phi + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$-\vec{\nabla}^2\Phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 4\pi\rho$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

- Agora vamos tentar organizar isso, lembrando que derivadas espaciais são $\vec{\nabla} \to \partial_i$, e que $(1/c)\,\partial_t \to \partial_0$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Como vimos anteriormente, podemos simplificar mais ainda:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} + \vec{\nabla}\frac{1}{c}\partial_t\Phi + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$-\vec{\nabla}^2\Phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 4\pi\rho$$

- Isso nos dá:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{\nabla}\partial_0\Phi - \partial_\mu\partial^\mu\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}\Phi - \partial_0\vec{A}\right) = 4\pi\rho$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Portanto, se identificarmos $\Phi \to A^0$, podemos escrever:

$$\boxed{\partial^i(\partial_j A^j) + \partial^i \partial_0 \Phi} - \partial_\mu \partial^\mu A^i = \frac{4\pi}{c} J^i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial^i(\partial_\mu A^\mu)} - \partial_\mu \partial^\mu A^i = \frac{4\pi}{c} J^i$$

$$\partial_i \left(\partial^0 A^i - \partial^i \boxed{\Phi}\right) = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \partial_i \left(\partial^0 A^i - \partial^i \boxed{A^0}\right) = 4\pi\rho$$

- Finalmente, conseguimos escrever:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_\mu \left(\partial^i A^\mu - \partial^\mu A^i\right) = \frac{4\pi}{c} J^i \\ &\partial_i \left(\partial^0 A^i - \partial^i A^0\right) = \frac{4\pi}{c} \rho c \end{aligned}\right\} \partial_\mu \left(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\right) = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

J^0

$$+\partial_0 \left(\partial^0 A^0 - \partial^0 A^0\right) = 0$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Resumindo: as **Equações de Maxwell** se escrevem

$$\partial_\mu \left(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \right) = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$ (notem a ordem dos indices!)

- Ou seja, tanto o campo elétrico quanto o campo magnético estão incluídos nesse objeto ***anti-simétrico***, $\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$. Chamamos isso de ***tensor eletromagnético*** (ou ***tensor de Faraday***):

$$\boxed{F^{\nu\mu} \equiv \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu} \quad , \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$ (anti-simetria)

- Note que:

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \{ -\partial_0 , \vec{\nabla} \}$$

$$\boxed{A^\mu = \{ \Phi , \vec{A} \}}$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Podemos escrever o ***tensor eletromagnético*** tanto como:

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \ ,$$

- como da forma:

$$F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} F^{\mu\nu} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}$$

- onde temos:

$$A_{\mu} = \eta_{\mu\nu} A^{\nu} = \{ -\Phi \, , \, \overrightarrow{A} \} \ .$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Vamos agora anotar de que modo os campos elétrico e magnético se relacionam com o tensor eletromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ .$$

- Note que, pela anti-simetria, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, temos que

$$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0 \ .$$

- $F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i \rightarrow \vec{\nabla}(-\Phi) - \partial_0 \vec{A} \stackrel{!}{=} \vec{E}$ $\qquad E^i = F_{i0} = -F_{0i}$
- $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Finalmente temos então que o tensor eletromagnético contém o campo elétrico e o campo magnético:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad , \quad \partial_\mu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{array}{c|c} & \nu \\ \hline \mu & \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ +E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ +E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{F_{i0} = +E^i} \qquad \boxed{F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = +B_z}$$

$$\boxed{F_{0i} = -E^i} \qquad \boxed{F_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = -B_y}$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Por completeza, também podemos escrever o tensor com índices em cima:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{array}{c} \\ \mu \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \nu \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ -E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{F^{i0} = -E^i}$$

$$\boxed{F^{0i} = +E^i}$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Então, para resumir, as ***equações de Maxwell com fontes*** se escrevem:

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$ (notem a ordem dos índices no $F^{\nu\mu}$!)

- Já as **equações de Maxwell sem fontes**, tanto $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ quanto a Equação de Faraday, se escrevem:

DUAL DE HODGE DE F

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\delta F_{\alpha\beta} = \partial_\delta \left(\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} \right) = \partial_\delta F^{*\gamma\delta} = 0$$

(***Identidade de Jacobi — Exercício!***)

- Note que pela ***anti-simetria*** de $F^{\nu\mu}$ temos que:

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} = \partial_\nu \left[\frac{4\pi}{c} J^\nu \right]$$, mas pela Eq. da Continuidade $\partial_\nu J^\nu = 0$!

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Vamos agora nos valer do fato de que o tensor de Maxwell é um tensor. Isso significa, por exemplo, que podemos tomar a sua norma:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2\right)$$

- Essa norma é invariante — a mesma em qualquer referencial

- Sob transformações de Lorentz, o tensor se comporta:

$$F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\Lambda^{\nu}_{\ \beta}F^{\alpha\beta}$$

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\ \alpha}\Lambda_{\nu}^{\ \beta}F_{\alpha\beta}$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Agora vamos retornar ao nosso problema original, do fio infinito

S

$$\vec{E} = \frac{2\lambda}{\rho}\hat{\rho}$$

$$\vec{B} = 0$$

S'

v

$$\vec{E}' = \frac{2\lambda'}{\rho}\hat{\rho}$$

$$\vec{B}' = \frac{2I'}{c\,\rho}\hat{\varphi}$$

$$\vec{v} = -v\hat{z}$$

$$\beta \to -v/c$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ -E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F^{\alpha\beta}$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Agora vamos retornar ao nosso problema original, do fio infinito

S

$$\vec{E} = \frac{2\lambda}{\rho}\hat{\rho}$$

$$\vec{B} = 0$$

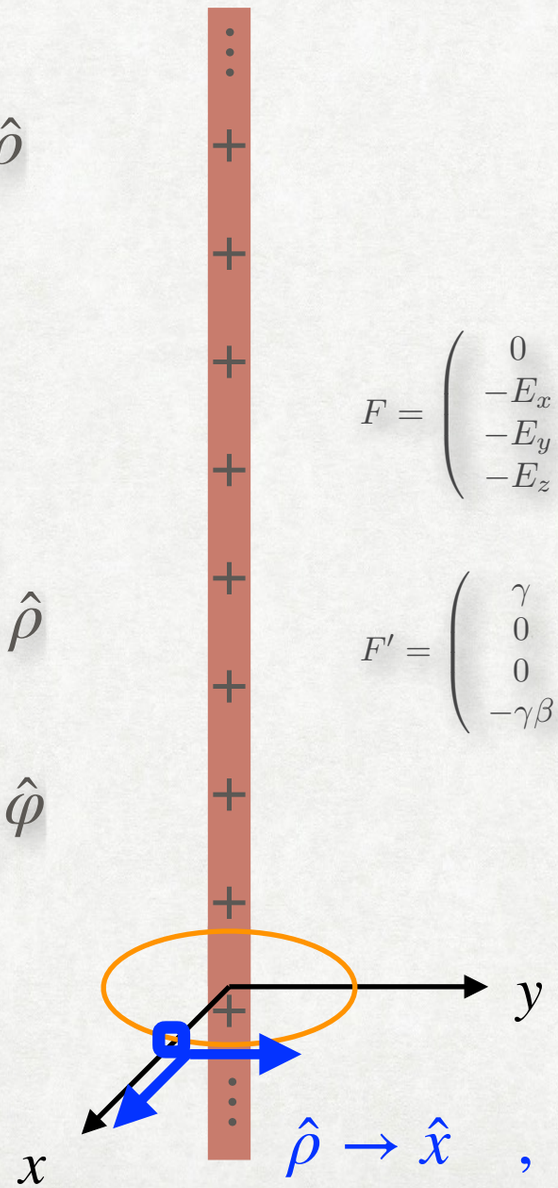
S'

v

$$\vec{E}' = \frac{2\lambda'}{\rho}\hat{\rho}$$

$$\vec{B}' = \frac{2I'}{c\,\rho}\hat{\varphi}$$

CHECA!!!



$$F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\Lambda^{\nu}_{\ \beta}F^{\alpha\beta}$$

$$F \to F' = \Lambda\, F\, \Lambda^{tr}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ -E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F' = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ -E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\beta \to -v/c$$

$$\hat{\rho} \to \hat{x} \quad , \quad \hat{\varphi} \to \hat{y}$$

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE

- Resumo da ópera: as Equações de Maxwell são

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad \Rightarrow \quad \partial \cdot F = J \qquad \text{com } \partial \cdot \partial \cdot F = 0 \leftrightarrow \partial \cdot J = 0$$

$$\partial_\mu F^{*\nu\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial \cdot F^* = 0$$

EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE É CONDIÇÃO DE INTEGRABILIDADE

- O tensor eletromagnético inclui tanto os campos elétrico e magnético — que são "uma coisa só"!

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{array}{c} \\ \mu \end{array} \overset{\nu}{\begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ -E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}}$$