Lista Suplementar 2

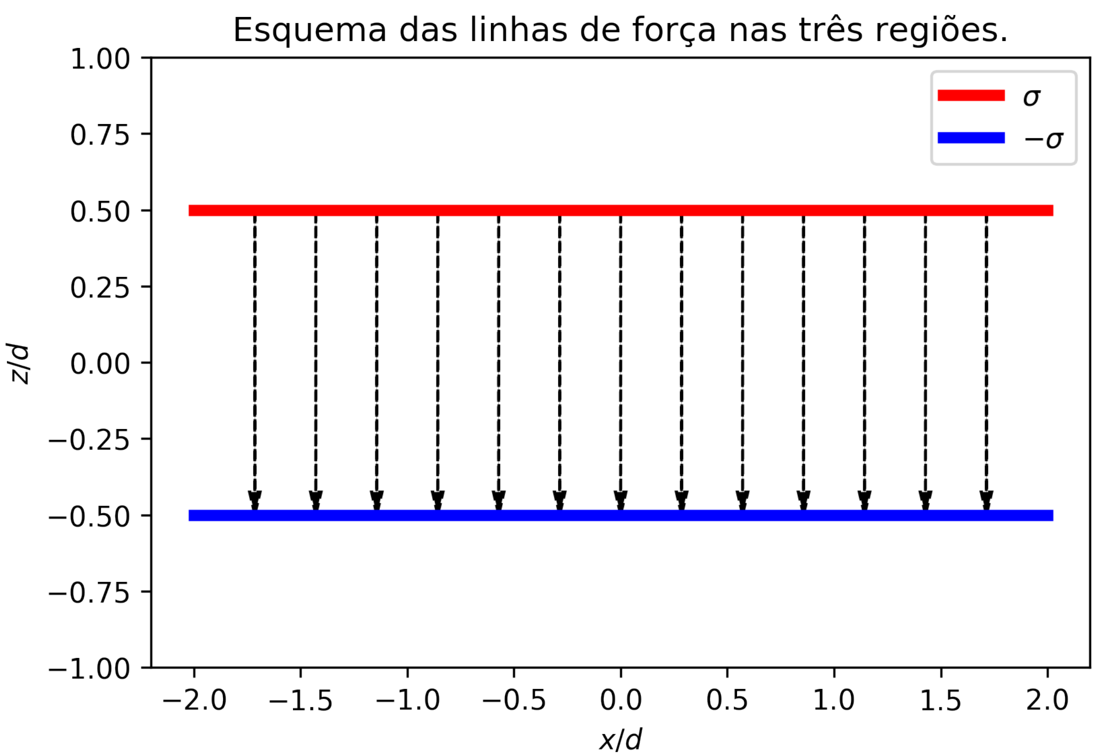
Nícolas André da Costa Morazotti

30 de Março de 2020

Questão 1

Duas superfícies planas horizontais estão separadas por uma distância d. A superfície de cima tem densidade de carga σ, e a de baixo tem densidade $-\sigma$. Desenhe as linhas de força nas três regiões do espaço: entre as superfícies, acima da superior e abaixo da inferior. Calcule a diferença de potencial entre as superfícies.

Vamos colocar o centro do sistema de coordenadas de forma que as placas estejam em $\pm d/2$. Como sabemos, seus campos são constantes. Então, a placa de cima gera um campo $\hat{z}\sigma/2\varepsilon_0$ para $z > d/2$ e $-\hat{z}\sigma/2\varepsilon_0$ para $z < d/2$. De forma similar, a placa de baixo gera um campo de mesmo módulo, mas sentidos distintos: $-\hat{z}\sigma/2\varepsilon_0$ para $z > -d/2$ e $\hat{z}\sigma/2\varepsilon_0$ para $z < -d/2$. Então, temos três regiões: abaixo da placa de baixo, o campo é $\sigma/2\varepsilon_0(-\hat{z} + \hat{z}) = 0$. Acima da placa de cima, $\sigma/2\varepsilon_0(\hat{z} - \hat{z}) - 0$. Entre as placas, $\sigma/2\varepsilon_0(-\hat{z} - \hat{z}) = -\hat{z}\sigma/\varepsilon_0$.



Para calcular a diferença de potencial entre as cargas, podemos utilizar a integral $V(A)-V(B) = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, onde A é um ponto na placa de cima, B é um ponto na placa de baixo, com mesmo

(x, y) para que possamos fazer um caminho retilíneo com $d\mathbf{r} = -\hat{z}dz$. A integração ocorre então de $-d/2$ a $d/2$. Então,

$$
\begin{aligned}
V(cima) - V(baixo) &= -\int_{baixo}^{cima} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\
&= -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} dz \\
&= -\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}
$$

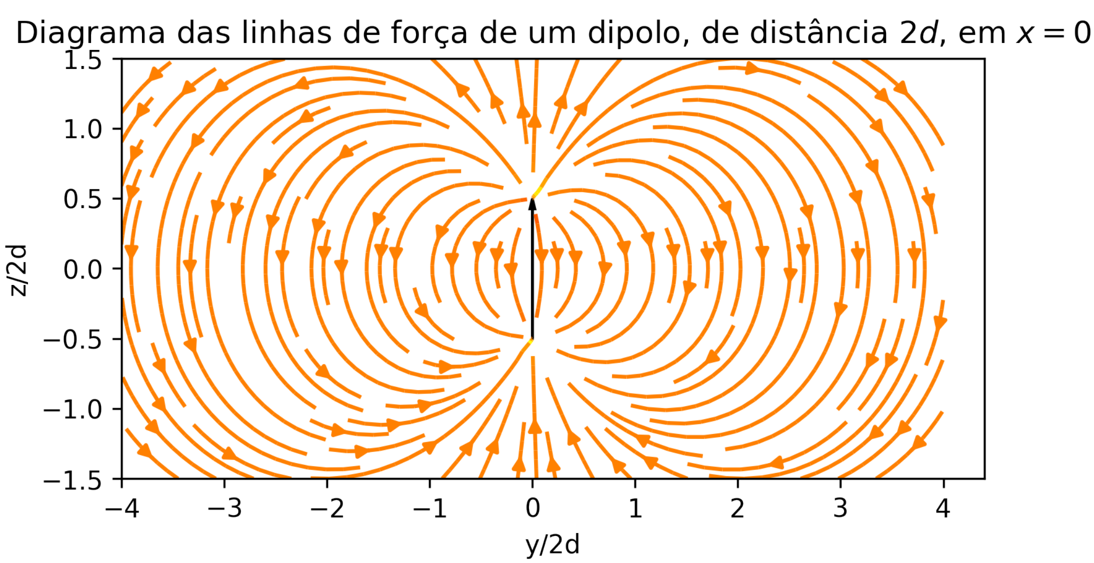
Questão 2

Um dipolo tem momento $\mathbf{p} = (2qd)\hat{z}$. Desenhe as linhas de força que saem e entram no dipolo.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.pyplot import figure
figure(dpi=300,figsize=(6,3))

d=0.5
Z, Y = np.mgrid[-1.5:1.5:100j, -4:4:100j]
U = Y/(Y**2 + (Z-d)**2)**(3/2) - Y/(Y**2 + (Z+d)**2)**(3/2)
V = (Z-d)/(Y**2 + (Z-d)**2)**(3/2) - (Z+d)/(Y**2 + (Z+d)**2)**(3/2)

plt.arrow(0,-d,0,2*d,length_includes_head=True, head_width=0.05,ec='k',fc='k')
plt.streamplot(Y, Z, U, V, density=[1.5, 1],color=V,cmap='autumn')
plt.title(r'Diagrama das linhas de força de um dipolo, de distância $2d$, em $x=0$')
plt.xlabel(r'y/2d')
plt.ylabel(r'z/2d')
plt.show()
```



Questão 3

Calcule o campo elétrico produzido pelo dipolo do item (2) no ponto com coordenadas $(x, y, 0)$. *Sugestão: o campo elétrico no plano $z = 0$ é paralelo a $\hat{z}$. Basta calcular $\partial V/\partial z$.*

O potencial de um dipolo $\mathbf{p} = 2qd\hat{z}$ pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}|^3} && (1)\\
&= \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}|^3} && (2)\\
&= \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} && (3)\\
\frac{\partial}{\partial z}V(\mathbf{r}) &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} && (4)\\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-6)z}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} && (5)\\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3pz^2}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}. && (6)
\end{aligned}
$$

No ponto $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$, o segundo termo se cancela ao fazer $z = 0$. O campo elétrico é então

$$
\mathbf{E}(x, y, 0) = -\hat{z}\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}. \quad (7)
$$

Questão 4

Calcule o campo elétrico produzido pelo dipolo do item (2) no ponto com coordenadas $(0, 0, z)$ a partir da lei de Coulomb aplicada a cada uma das cargas do dipolo.

Colocando a carga $-2q$ na origem e a carga $2q$ a uma distância d da carga negativa, o campo elétrico, pela lei de Coulomb, é

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{\mathbf{r}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\mathbf{r}-d\hat{z}}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}}\right\} && (8)\\
\mathbf{E}(0,0,z) &= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{z\hat{z}}{z^3} + \frac{(z-d)\hat{z}}{(z-d)^3}\right] && (9)\\
&= \frac{q\hat{z}}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-d)^2}\right]. && (10)
\end{aligned}
$$

Podemos expandir o termo $(z-d)^{-2}$, utilizando $d/z \ll 1$:

$$
(z-d)^{-2} = \frac{1}{z^2}(1-d/z)^{-2} \approx \frac{1}{z^2}(1+2d/z) = \frac{1}{z^2} + 2\frac{d}{z^3}. \quad (11)
$$

Substituindo na equação 10, temos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(0,0,z) &\approx \frac{q\hat{z}}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} + 2\frac{d}{z^3}\right] && (12)\\
&= \hat{z}\frac{qd}{\pi\varepsilon_0 z^3}. && (13)
\end{aligned}
$$

Questão 5

Calcule o campo elétrico produzido do item (2) no ponto com coordenadas $(0, 0, z)$ a partir da expressão para o potencial do dipolo.

A partir do potencial do dipolo, temos a expressão 6. Veja que as componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ do gradiente são:

$$\frac{\partial}{\partial x}V(x,y,z) = \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{14}$$

$$= \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{6x}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] + \frac{p_x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \tag{15}$$

Como o dipolo aponta na direção z, $p_x \equiv 0$. O primeiro termo, com $x = 0$, é 0. De maneira similar, poderíamos ter calculado a componente $\hat{y}$ do gradiente. A diferença é que teríamos $6y$ ao invés de $6x$, que também se anula, e p_y, que também é 0. Então só temos a componente z do campo, que é a componente obtida na equação 6. Calculando tal equação no ponto $(0, 0, z)$

$$\frac{\partial}{\partial z}V(0,0,z) = \frac{2qd}{4\pi\varepsilon_0 z^3} - \frac{3\cdot 2qdz^2}{4\pi\varepsilon_0 z^5} \tag{16}$$

$$= \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3} - \frac{3qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3} \tag{17}$$

$$= \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3}(1-3) \tag{18}$$

$$= -\frac{qd}{\pi\varepsilon_0 z^3}. \tag{19}$$

Como $\mathbf{E} = -\nabla V$, trocamos o sinal da equação 19 e chegamos à equação 13.

Questão 6

Uma esfera de raio R tem densidade volumétrica de carga uniforme, igual a ρ. Encontre o potencial eletrostático em função da distância $r > R$, medida a partir do centro da esfera. *Sugestão: Fora da esfera, o potencial equivale ao da carga da esfera concentrada em seu centro.*

Para fora da esfera, podemos utilizar como se o potencial fosse de uma carga pontual centrada na origem. A carga total da esfera é $Q = 4\pi R^3\rho/3$. Assim,

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \tag{20}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r}. \tag{21}$$

Questão 7

Repita o problema anterior, mas agora calcule o potencial em função da distância $r < R$. *Sugestão: Dentro da esfera, o campo elétrico é $E(r) = (1/3\varepsilon_0)\rho r$. A diferença de potencial entre o ponto a distância r do centro e a superfície da esfera é $\int_r^R E(r')dr'$.*

Para calcular a diferença de potencial entre um ponto a uma distância $r < R$ do centro da esfera, vamos substituir o campo elétrico $E(r)$. Vamos utilizar que o potencial elétrico é um campo escalar

contínuo no espaço. Assim, podemos afirmar que $V(R) = V_{fora}(R)$.

$$V(r) - V(R) = \int_r^R E(r')dr' \tag{22}$$

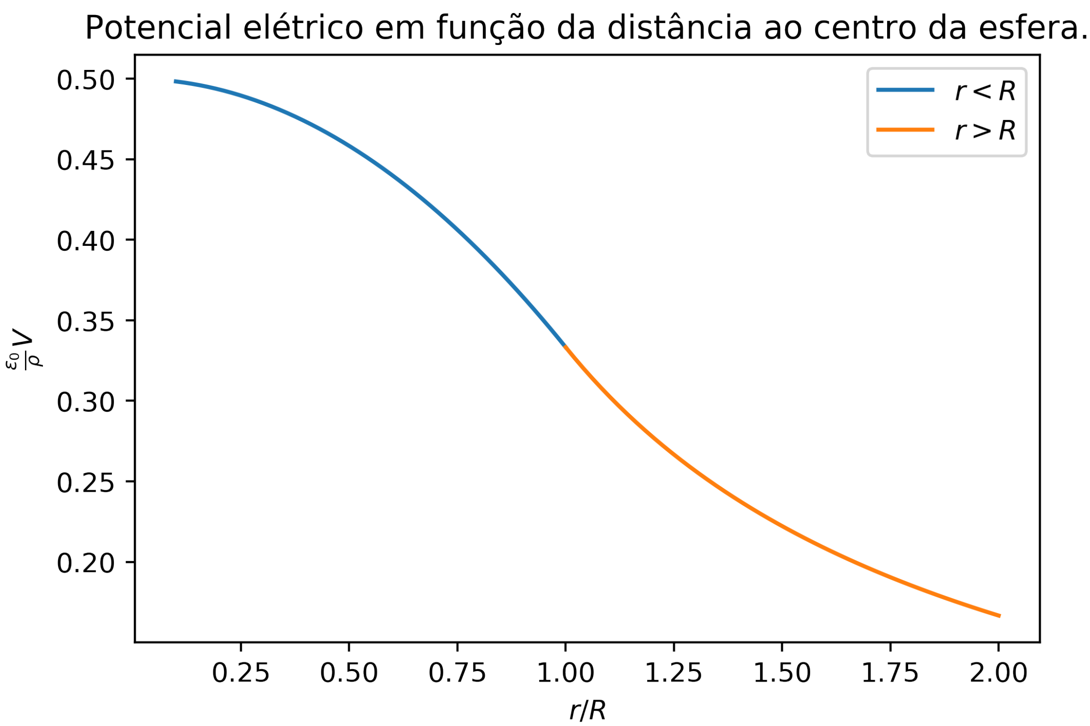
$$V(r) - \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_r^R r'dr' \tag{23}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r'^2}{2}\Big|_r^R \tag{24}$$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2) \tag{25}$$

$$V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}R^2 + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 - \frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 \tag{26}$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2 - \frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2. \tag{27}$$



Questão 8

Uma barra cilíndrica metálica infinita tem raio a e densidade superficial de carga σ. Encontre o campo elétrico num ponto P fora da barra, a uma distância $r > a$ do eixo da barra.

Para encontrar o campo elétrico no ponto P, podemos utilizar uma superfície gaussiana cilíndrica

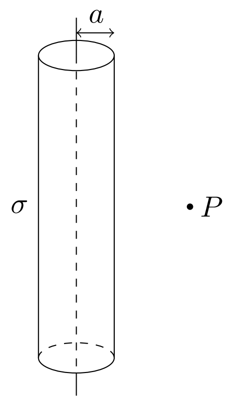


Figura 1: Diagrama das questões 8 e 9.

de altura L e raio r. Pela lei de Gauss,

$$E 2\pi r L = \frac{\sigma 2\pi a L}{\varepsilon_0} \tag{28}$$

$$E = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r} \tag{29}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r}\hat{r}. \tag{30}$$

Questão 9

A partir do resultado da questão anterior, calcule o potencial no mesmo ponto P, isto é, a uma distância $r < a$ do centro da barra. *Sugestão: Tome como referência um ponto $\bar{O}$ na superfície da barra.*

Utilizando o campo da equação 30, podemos utilizar um caminho radial que sai da casca cilíndrica e vai até P, de forma que $d\mathbf{r} = \hat{r}dr$. Colocando o potencial na casca como nulo (afinal, não podemos zerar o potencial com $r \to \infty$),

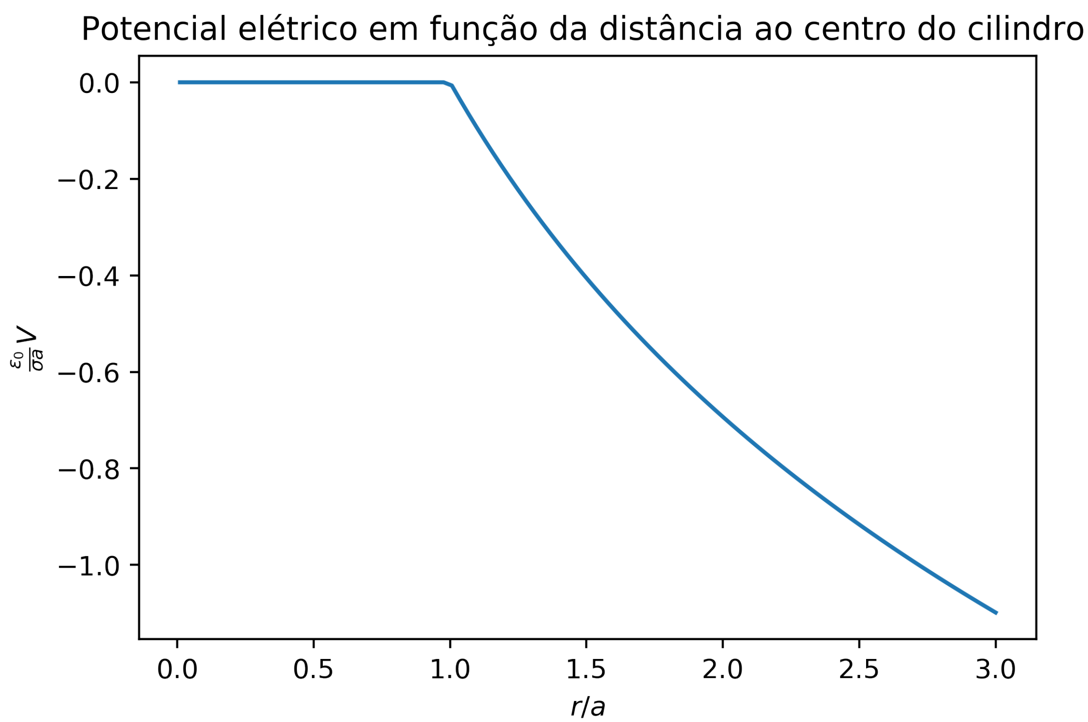
$$V(r) - \underbrace{V(a)}_{\equiv 0} = -\int_a^r \mathbf{E}(r') \cdot d\mathbf{r}' \tag{31}$$

$$V(r) = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\int_a^r \frac{dr'}{r'} \tag{32}$$

$$= -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln(r')\Big|_a^r \tag{33}$$

$$= -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{a}\right). \tag{34}$$

Internamente ao fio condutor, o campo elétrico é nulo, o que implica que o potencial elétrico é constante.



Questão 10

Um dipolo está imerso num campo elétrico uniforme $\mathbf{E} = E_0\hat{z}$. O centro do dipolo está na origem do sistema de coordenadas. O momento do dipolo está no plano yz e forma um ângulo θ com a direção $\hat{z}$. Calcule o torque que o campo elétrico produz sobre o dipolo. *Sugestão: Calcule a força que cada carga do dipolo sofre, devida ao campo elétrico, e calcule o torque, que é a soma de* $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j$*, onde* $\mathbf{r}_j$ *é a posição de cada carga e* $\mathbf{F}_j$ *é a força sobre ela.*

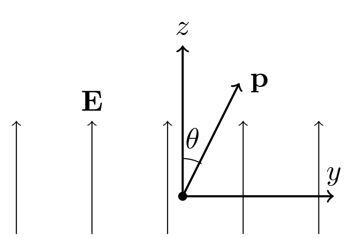


Figura 2: Diagrama do exercício 10.

Vamos chamar a distância entre as cargas de d, e as cargas de q. Uma vez que o centro do dipolo se encontra na origem do sistema de coordenadas, a posição da carga positiva é $(0, d\sin\theta/2, d\cos\theta/2)$ e a da carga negativa é $(0, -d\sin\theta, -d\cos\theta)$. A força que o campo elétrico $\mathbf{E}$ faz sobre a carga positiva é $F_+ = \hat{z}E_0 q$ e sobre a carga negativa é $F_- = -\hat{z}E_0 q$. O torque que o campo faz sobre as cargas pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+ + \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_- && (35)\\
&= \frac{E_0 q d}{2}[(\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) \times \hat{z} + (-\sin\theta\hat{y} - \cos\theta\hat{z}) \times (-\hat{z})] && (36)\\
&= \frac{E_0 q d}{2}[\sin\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{x}] && (37)\\
&= \hat{x} E_0 q d \sin\theta && (38)\\
&= \hat{x} E_0 p \sin\theta && (39)\\
&= \mathbf{p} \times \mathbf{E}. && (40)
\end{aligned}$$