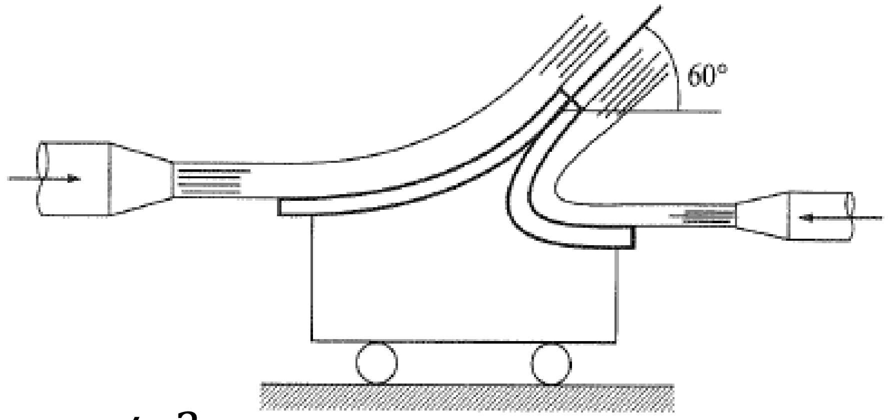
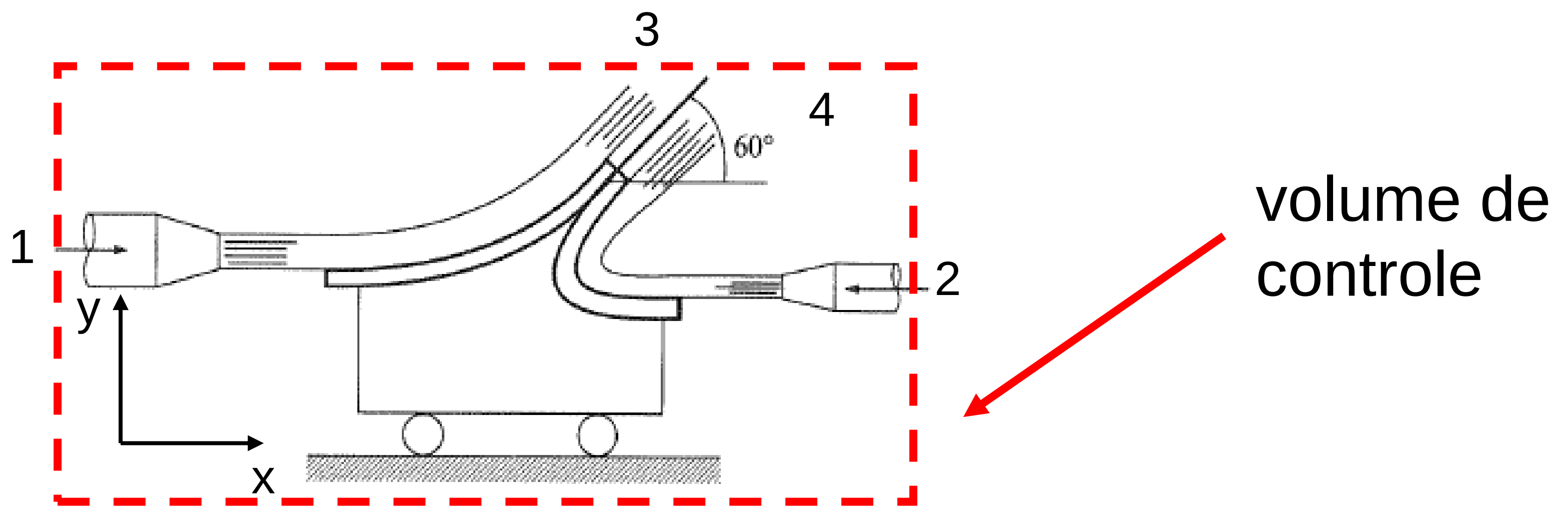
Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

1 - O bocal da esquerda tem uma área de 30 cm² e lança um jato com velocidade de 10 m/s contra a pá. Sabendo que o sistema está em equilíbrio, qual é a vazão do segundo bocal e qual a velocidade do jato se a área do bocal é 10 cm²?(O fluido é água com $\gamma = 10^4 \mathrm{N/m^3}$).

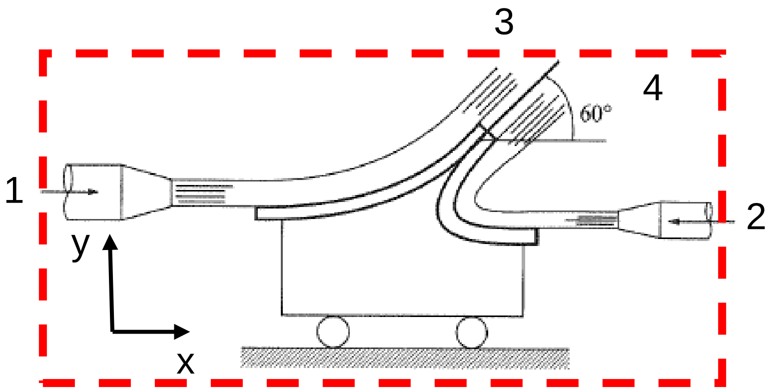


$A_1 = 30x10^{-4} m^2$ $\quad$ $A_2 = 10x10^{-4} m^2$ $\quad$ $g = 10\, m/s^2$

$v_1 = 10\, m/s$ $\quad$ $v_2 = ?$ $\quad$ $\gamma = 10^4\, N/m^3$



Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



Aplicando a equação da conservação da quantidade de movimento no volume de controle definido:

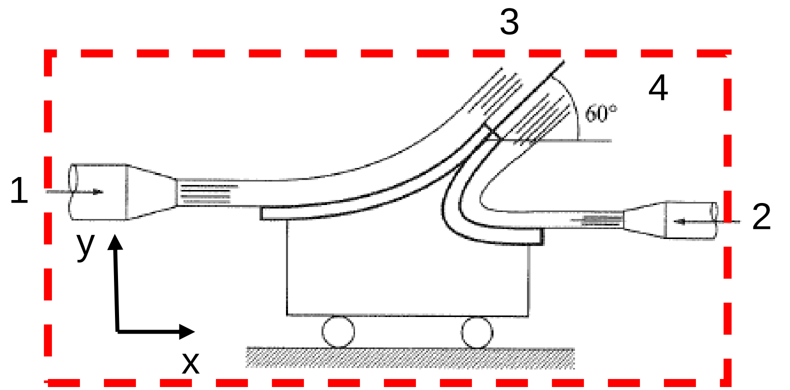
$$m_{\forall C}\vec{a}_{\forall C} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\vec{V}_r \rho dV + \int_{SC}\vec{V}_r \rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} dA = \sum \vec{F}$$

Como o sistema está em equilíbrio: $\vec{a}_{\forall C} = 0$

Para a direção x:

$$\sum \vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} V_x \rho dV + \frac{\gamma}{g} v_1 A_1 v_1 - \frac{\gamma}{g} v_2 A_2 v_2 + \frac{\gamma}{g} v_1 A_1 v_1 cos60° + \frac{\gamma}{g} v_2 A_2 v_2 cos60°$$

Como o sistema está em equilíbrio: $V_{\forall C} = constante$ $\sum \vec{F}_x = 0$



Portanto:

$$0 = \frac{10^4}{10}(10 \times 30x10^{-4} \times 10)\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{10^4}{10}(v_2 \times 10x10^{-4} \times v_2)\left(\frac{1}{2} + 1\right)$$

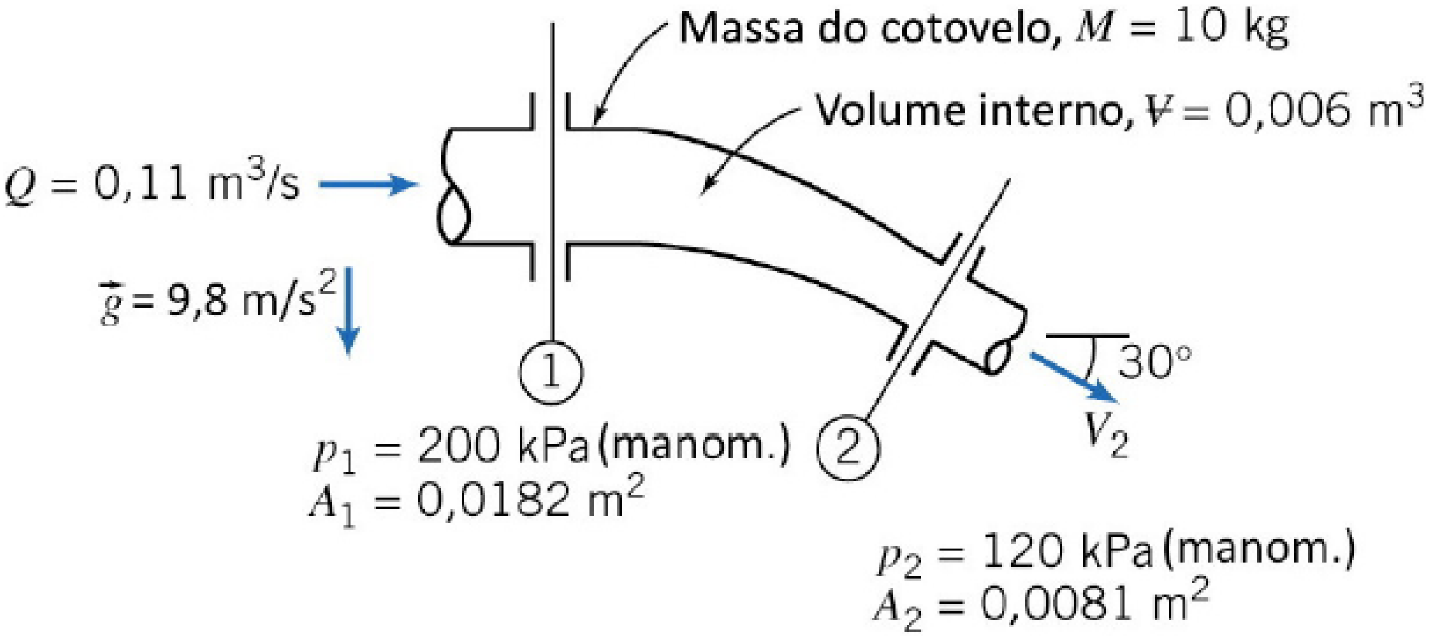
$$v_2 = 10\, m/s$$

Para o cálculo da vazão temos:

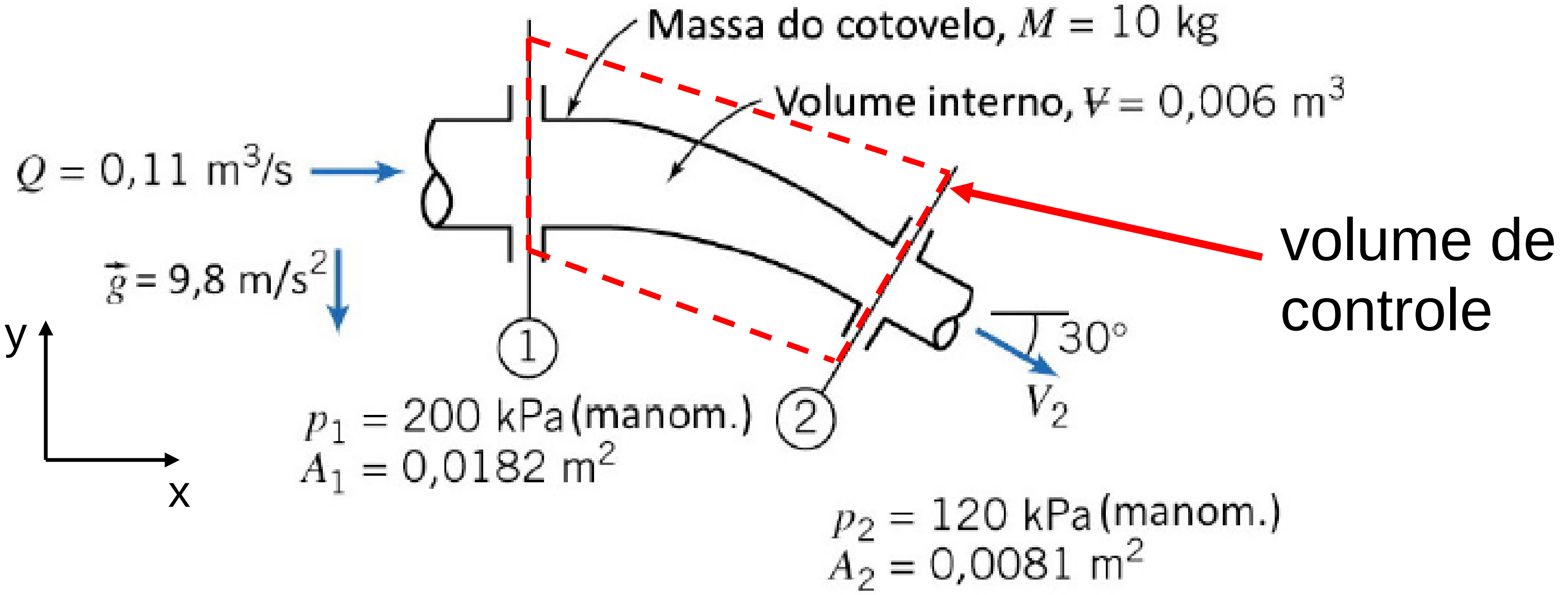
$$\dot{Q}_2 = v_2 A_2 = 10 \times 10x10^{-4} = 10x10^{-3}\, m^3/s = 10\, l/s$$

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

2 - Um cotovelo redutor de 30° é mostrado na figura. O fluido é água (ρ = 1000 kg/m^3). Calcule as componentes horizontal e vertical da força que deve ser aplicada pelos tubos adjacentes para manter o cotovelo estático.



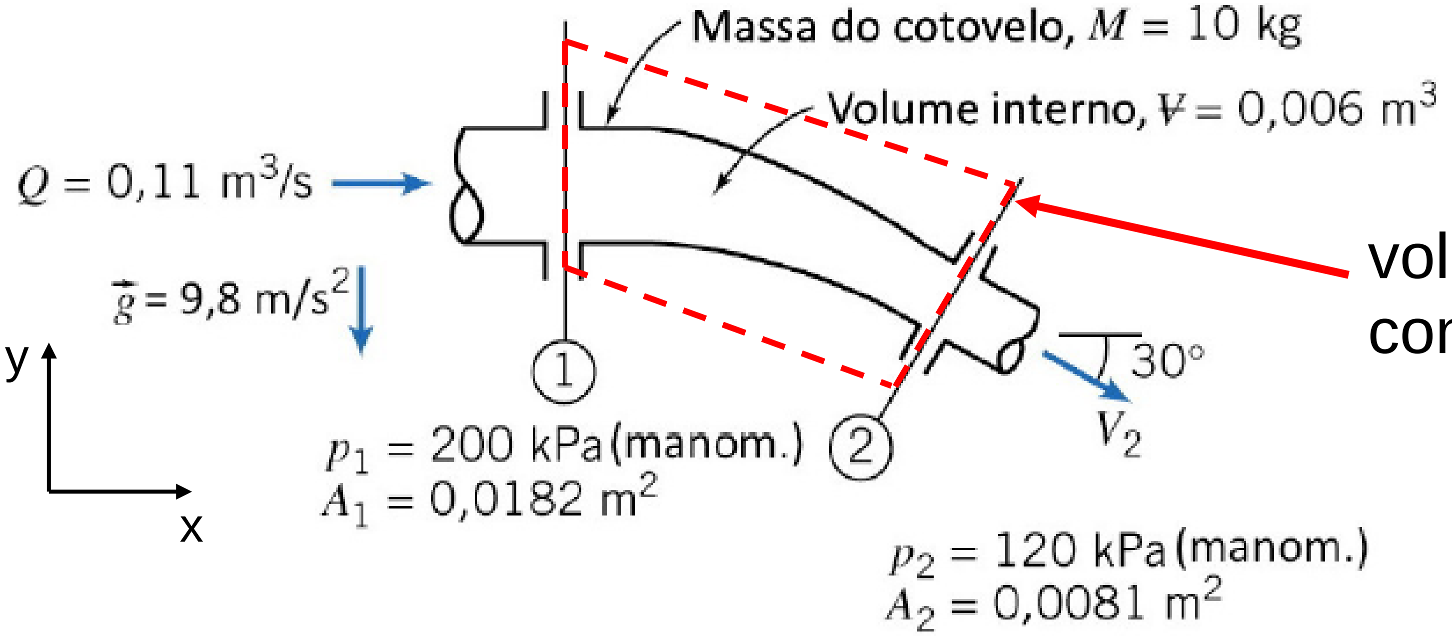
Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



Assumindo o volume de controle mostrado na figura entre as seções 1 e 2 e aplicando a equação de conservação de quantidade de movimento:

$$m_{\forall C}\vec{a}_{\forall C} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{V}_r \rho dV + \int_{SC} \vec{V}_r \rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} dA = \sum \vec{F}$$

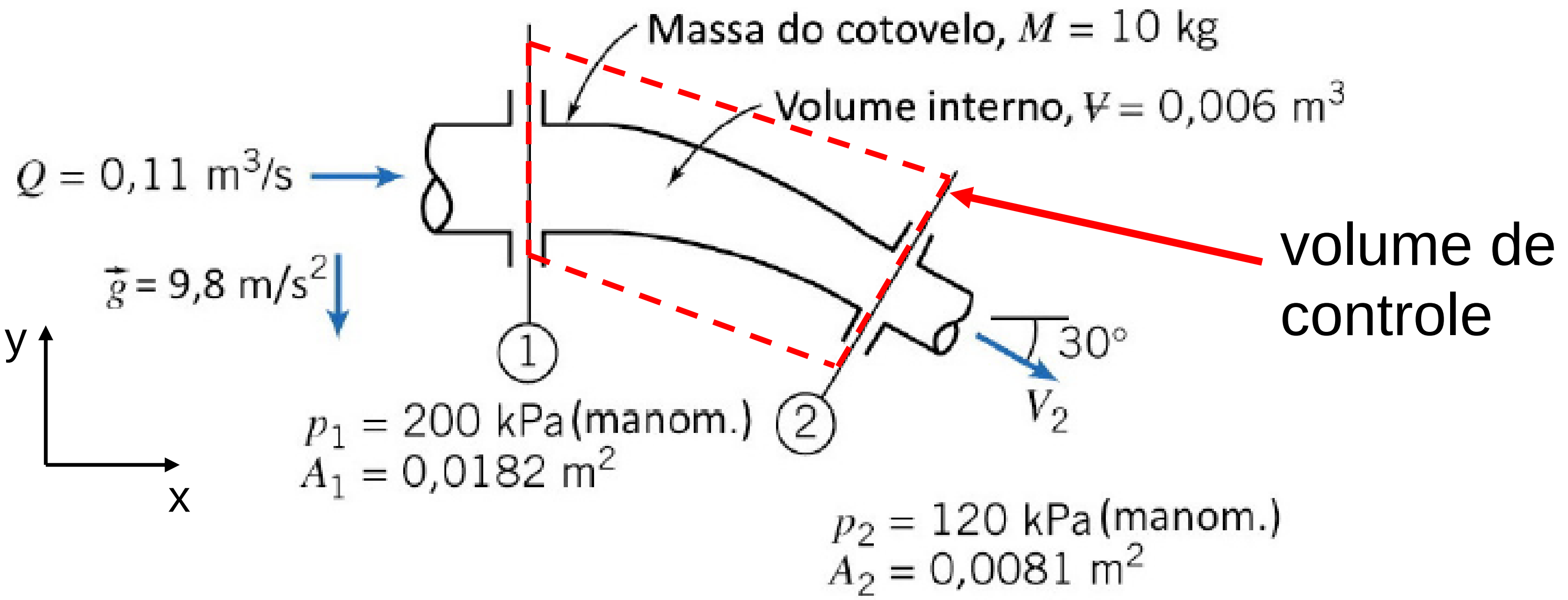
Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



Para a direção x: o volume de controle não se movimenta ($\vec{a}_{\forall C} = 0$) e não variação do volume de controle ($d\forall = 0$)

$$m_{\forall C}\vec{a}_{\forall C} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{V}_r \rho dV + \int_{SC} \vec{V}_r \rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} dA = \sum \vec{F}$$

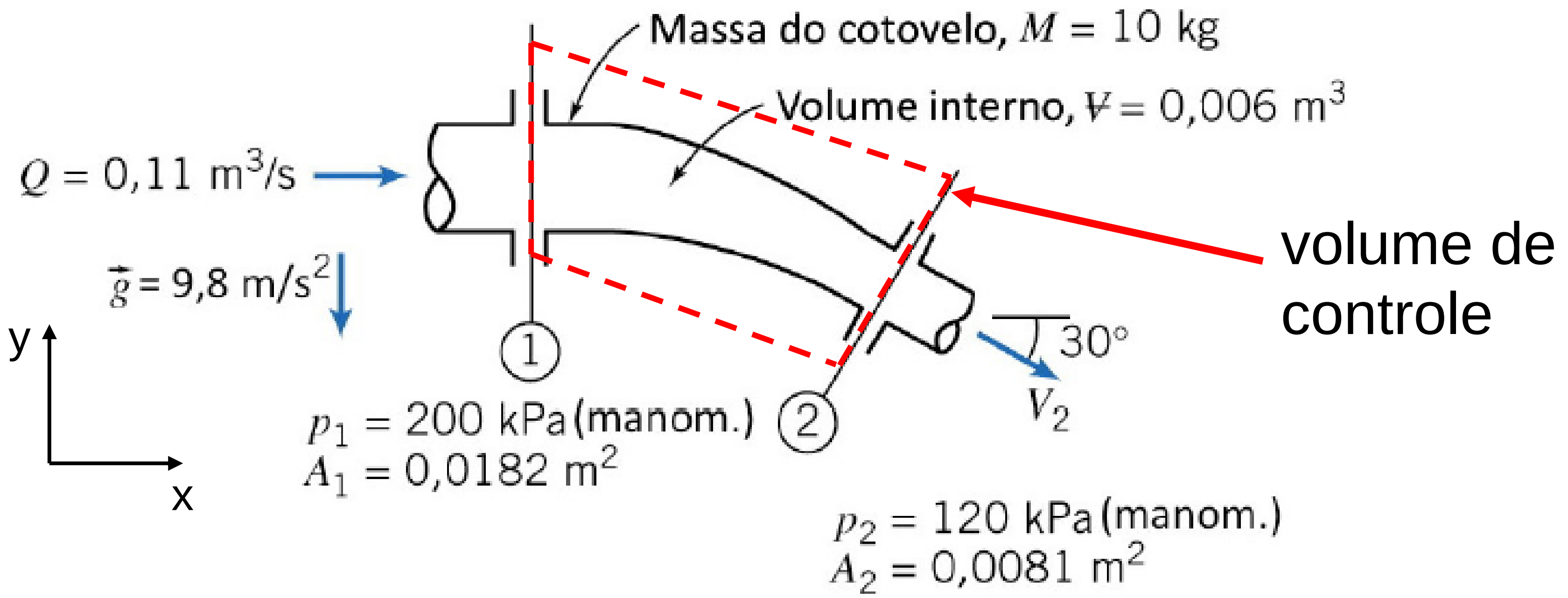
Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



Para a direção x: o volume de controle não se movimenta ($\vec{a}_{\forall C} = 0$) e não variação do volume de controle ($d\forall = 0$)

$$F_x + p_1A_1 - p_2A_2cos30° = (-v_1)\rho_1v_1A_1 + (v_2)\rho_2v_2A_2cos30°$$

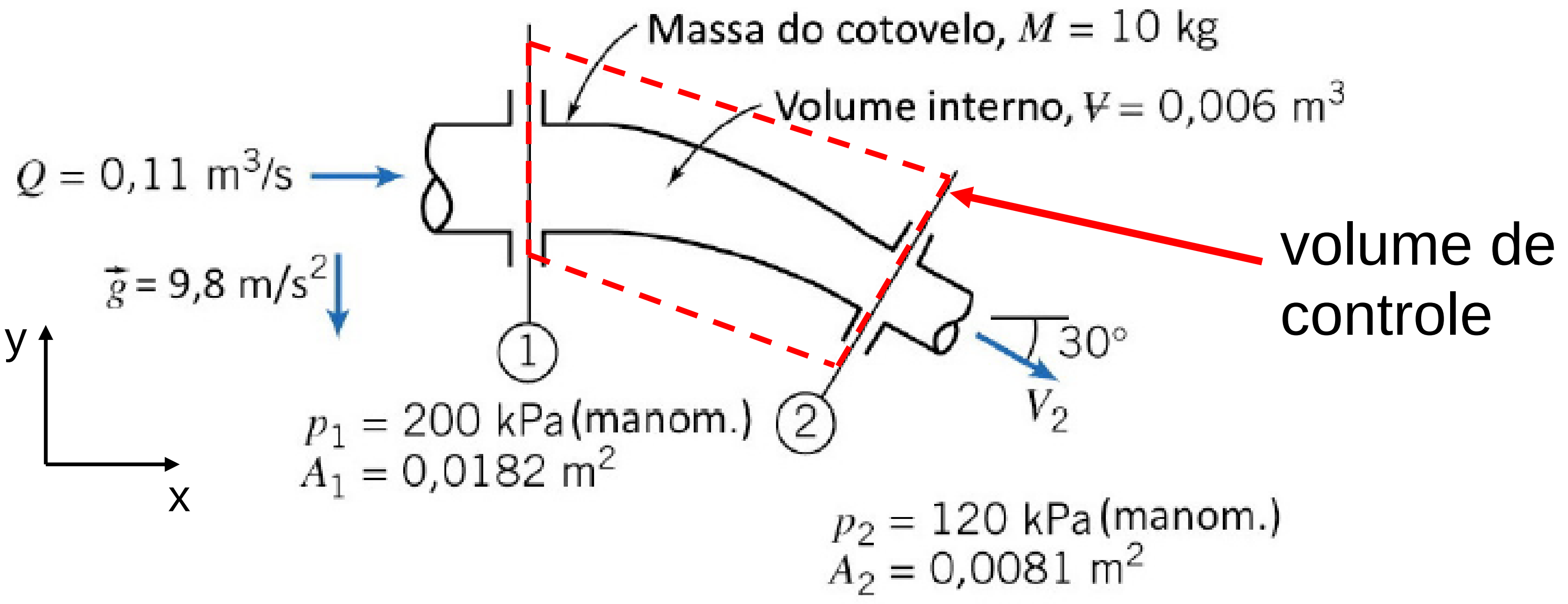
Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



Na seção 1 temos: $\dot{Q}_1 = v_1 A_1 \Rightarrow v_1 = \dfrac{\dot{Q}_1}{A_1} = \dfrac{0{,}11}{0{,}0182} = 6{,}044\, m/s$

Na seção 2 temos: $\dot{Q}_2 = \dot{Q}_1 = v_2 A_2 \Rightarrow v_2 = \dfrac{\dot{Q}_2}{A_2} = \dfrac{0{,}11}{0{,}0081} = 13{,}580\, m/s$

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



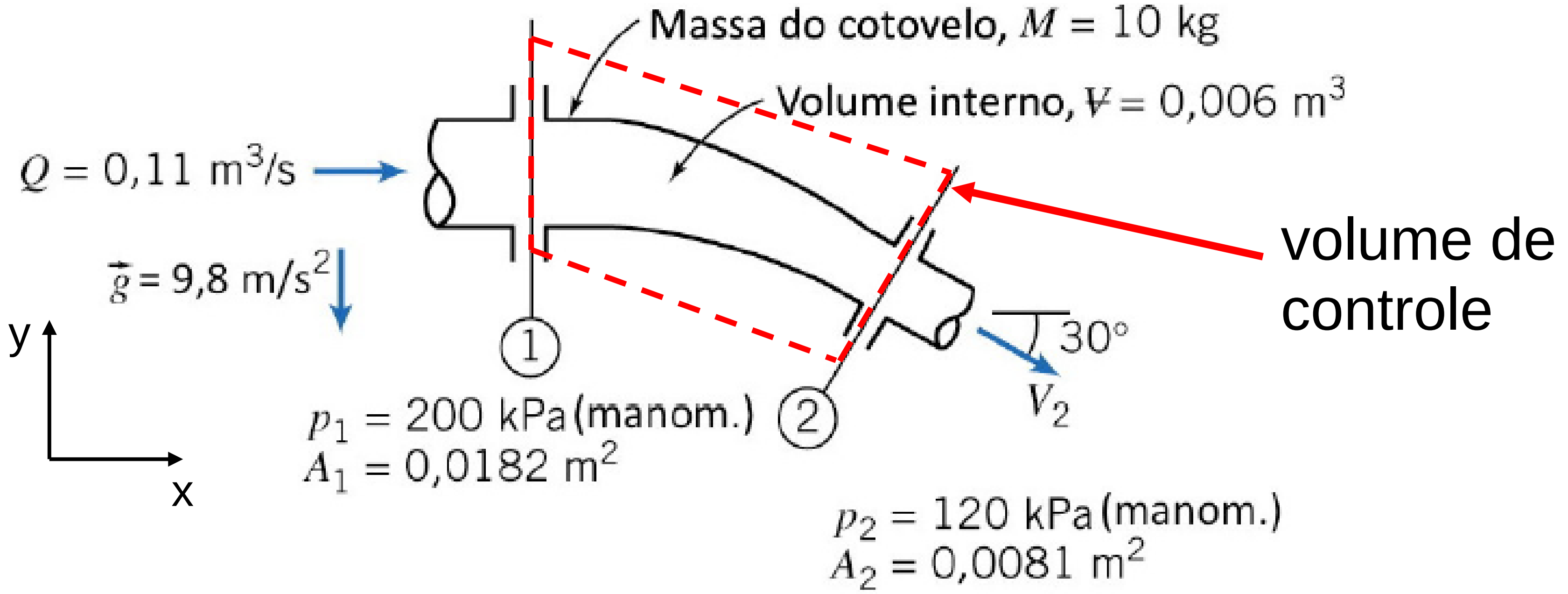
Logo:

$$F_x + (200x10^3 \times 0{,}0182) - (120x10^3 \times 0{,}0081)\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$(-6{,}044 \times 1000 \times 6{,}044 \times 0{,}0182) + \left(13{,}580 \times 1000 \times 13{,}580 \times 0{,}0081 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore F_x = -2.169{,}42N$$

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

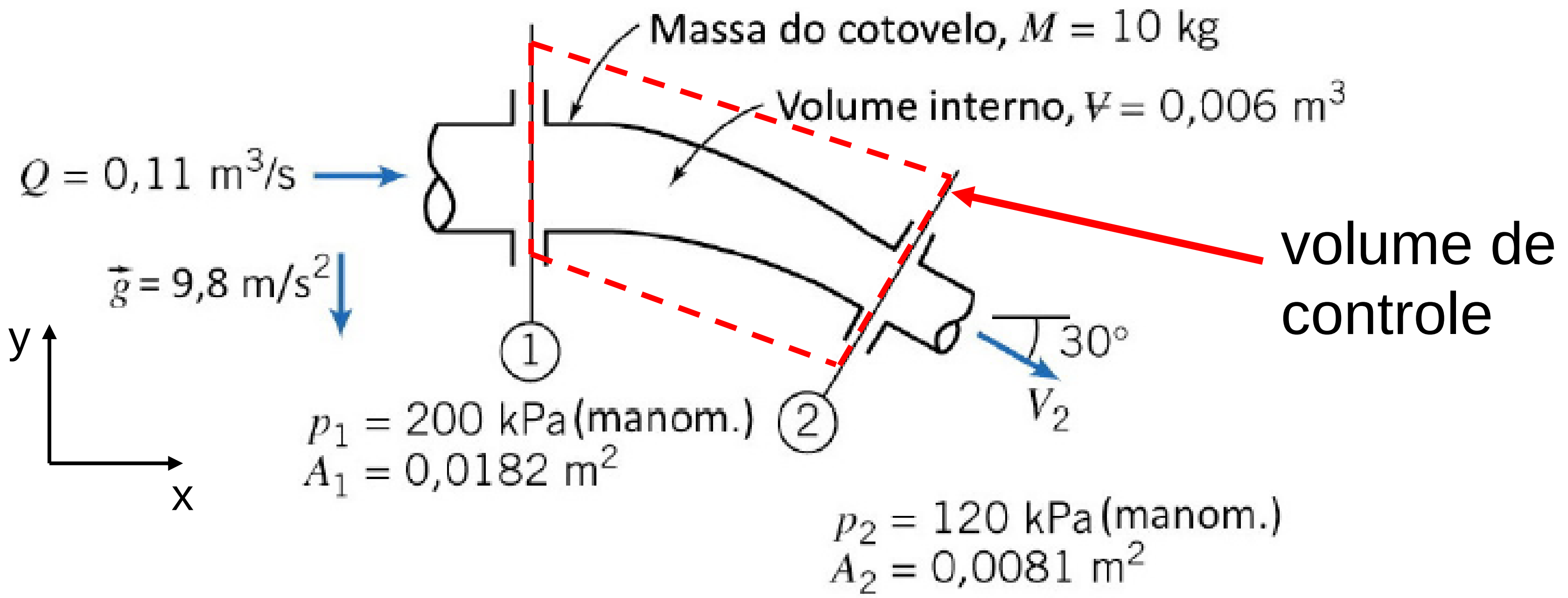


Para a direção y: o volume de controle não se movimenta ($\vec{a}_{\forall C} = 0$) e não variação do volume de controle ($d\forall = 0$)

$$F_y - P_{cotovelo} - P_{água} + p_2 A_2 sen30° = -(v_2)\rho_2 v_2 A_2 sen30°$$

$$F_y - Mg - \rho_{água} V_{água} g + p_2 A_2 sen30° = -(v_2)\rho_2 v_2 A_2 sen30°$$

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



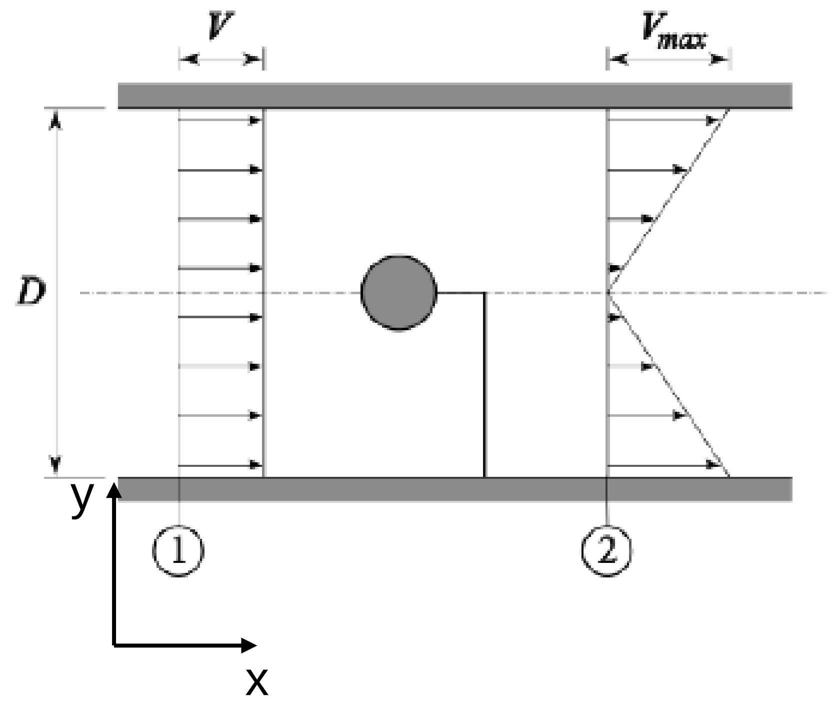
Logo: $$F_y - (10 \times 9{,}8) - (1000 \times 0{,}006 \times 9{,}8) + \left(120x10^3 \times 0{,}0081 \times \frac{1}{2}\right) =$$

$$-\left(13{,}580 \times 1000 \times 13{,}580 \times 0{,}0081 \times \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore F_y = -1.076{,}09N$$

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

3 - Uma pequena esfera é testada num túnel de vento de seção circular de diâmetro D = 1m. A pressão é uniforme nas seções 1 e 2. A pressão a montante é 20mm de H_2O (manométrica), e a pressão a jusante é 10mm de H_2O (manométrica) e a velocidade média do ar, V = 10m/s. O perfil de velocidade na seção 2 é linear; ele varia de zero na linha de centro do túnel a um valor máximo V_{max} na sua parede. Considerando o escoamento incompressível e a massa específica do ar igual a ρ = 1,20kg/m^3, determine a força de arrasto no conjunto objeto e haste de apoio (despreze a resistência viscosa na parede do túnel).



$$p_1 = 20mm\ de\ H_2O = 196{,}13\ Pa$$

$$p_2 = 10mm\ de\ H_2O = 98{,}07\ Pa$$

$$D_1 = D_2 = 1\ m$$

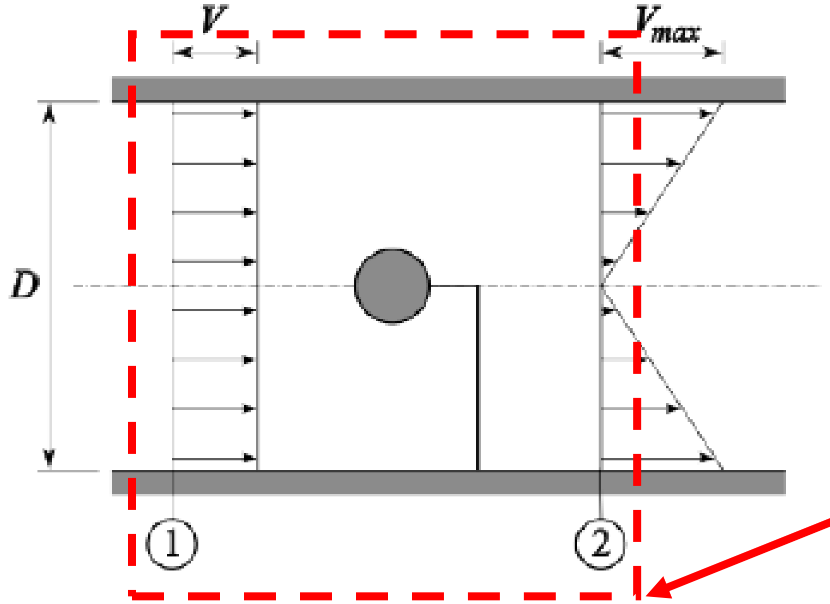
$$v_1 = 10\ m/s$$

$$v_2 = C_1 + C_2 R$$

Para R=0 → v_2=0 →C_1=0

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

Assumindo o volume de controle indicado abaixo:



volume de controle

Aplicando a equação da continuidade para o volume de controle acima definido:

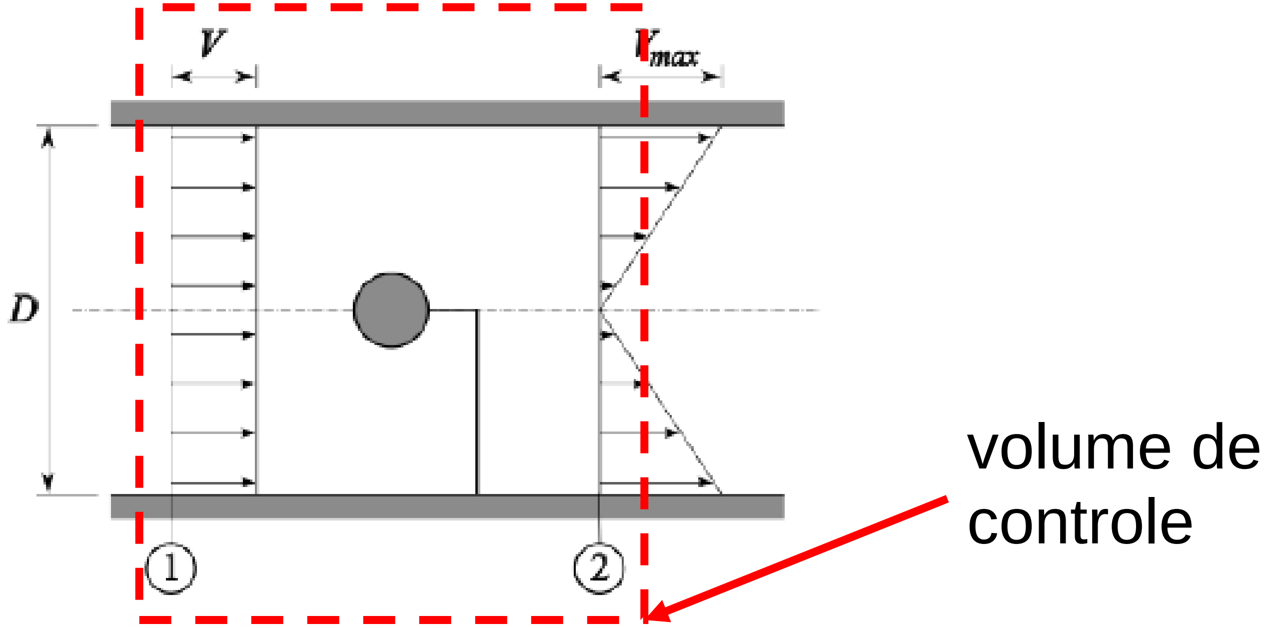
$$\rho_{ar} V_{ar} A_1 = \rho_{ar} V_{ar} \frac{\pi D^2}{4} = \int_0^{D/2} \rho_{ar} (C_2 R) 2\pi R dR = \rho_{ar} C_2 2\pi \int_0^{D/2} R^2 dR$$

$$\rho_{ar} V_{ar} \frac{\pi D^2}{4} = \rho_{ar} C_2 2\pi \int_0^{D/2} R^2 dR$$

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

$$10 \times \frac{(1)^2}{4} = C_2 2 \frac{R^3}{3}\bigg|_0^{1/2} = C_2\left(\frac{2(1/2)^3}{3}\right)$$

$$10 \times \frac{(1)^2}{4} = C_2\left(\frac{2(1/2)^3}{3}\right) \Rightarrow C_2 = 30$$

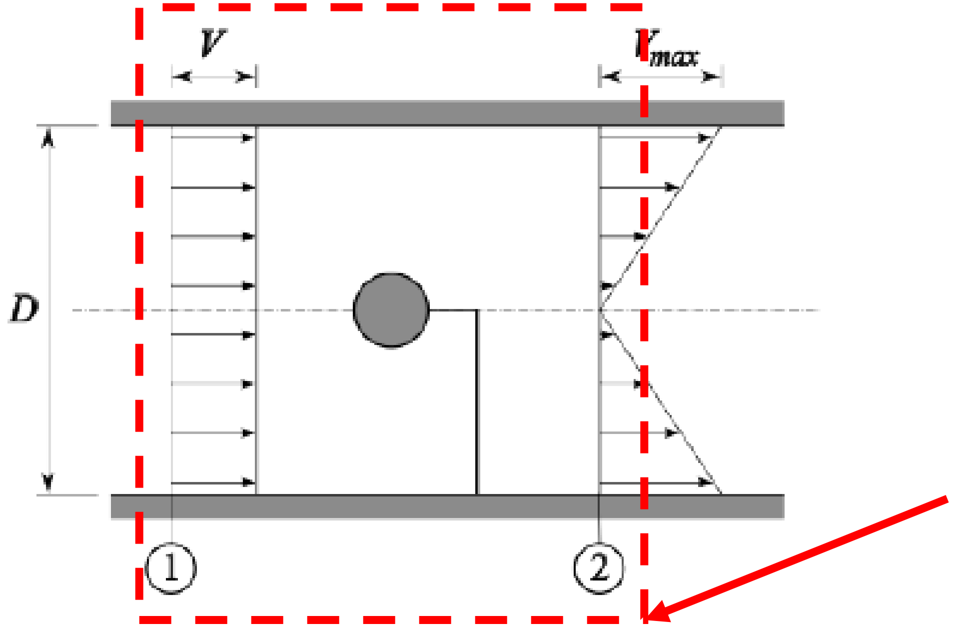


Logo: $v_2 = 30R \Rightarrow para\ R = 1/2 \Rightarrow v_2 = 15\, m/s$

Aplicando a equação da quantidade de movimento no volume de controle definido com as seguintes hipóteses: $\vec{a}_{\forall C} = 0$ $\quad d\forall = 0$. Logo:

$$m_{\forall C}\vec{a}_{\forall C} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{V}_r \rho dV + \int_{SC} \vec{V}_r \rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} dA = \sum \vec{F} \Rightarrow \quad \int_{SC} \vec{V}_r \rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} dA = \sum \vec{F}$$

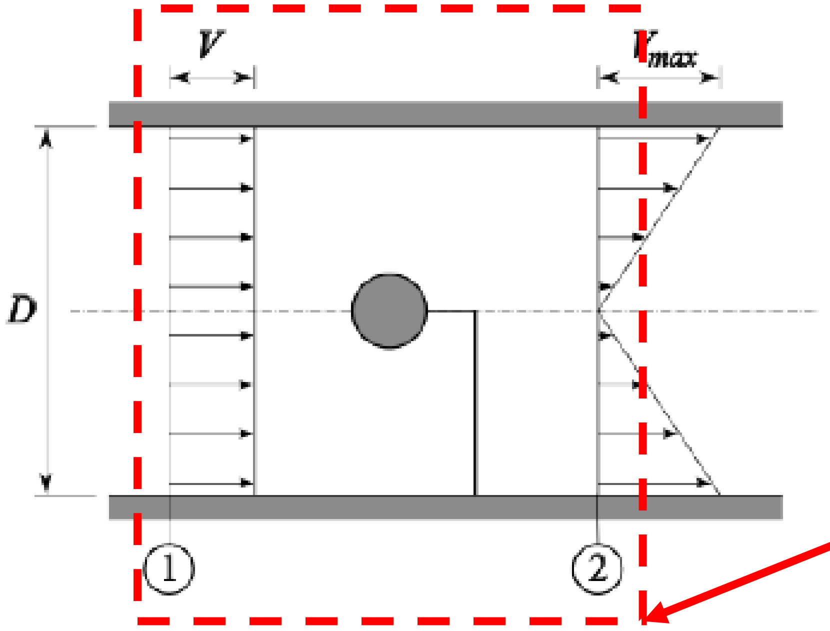
Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



volume de controle

$$\rho_{água}\, g(p_1 - p_2)\frac{\pi D^2}{4} + F_{arrasto} = \rho_{ar} v \frac{\pi D^2}{4}(-v) + \underbrace{\int_0^{D/2} \rho_{ar} 2\pi R (30R)^2 dR}_{I}$$

$$I = \int_0^{D/2} \rho_{ar} 2\pi R (30R)^2 dR = 2\pi\rho_{ar}\int_0^{D/2} 900 R^3 dR = 2\pi\rho_{ar}\left.\frac{900R^4}{4}\right|_0^{D/2} = 2\pi\rho_{ar}\frac{450}{16}D^4$$



volume de controle

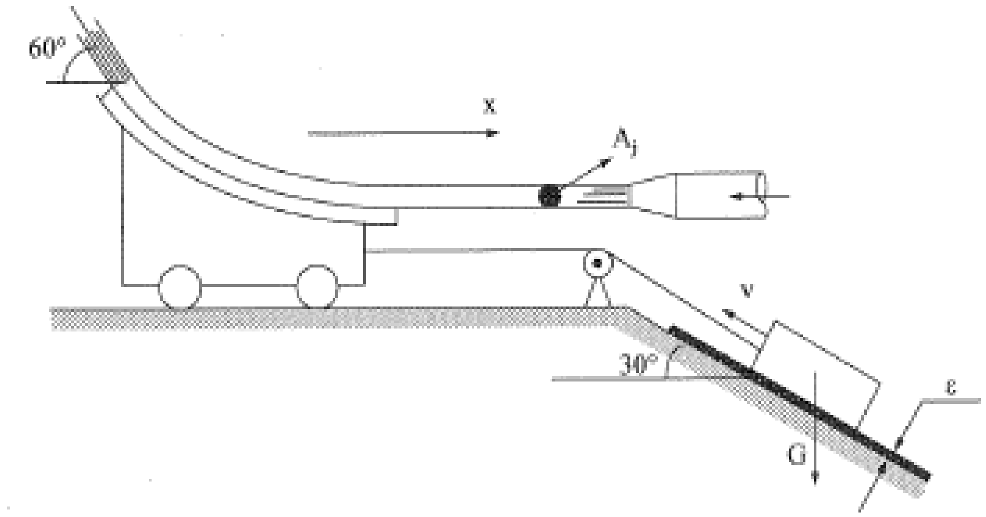
Logo:

$$\rho_{água}g(p_1 - p_2)\frac{\pi D^2}{4} + F_{arrasto} = \rho_{ar}v\frac{\pi D^2}{4}(-v) + \pi\rho_{ar}\frac{450}{16}D^4$$

Substituindo os valores tem-se: $F_{arrasto} = -65{,}15\ N$

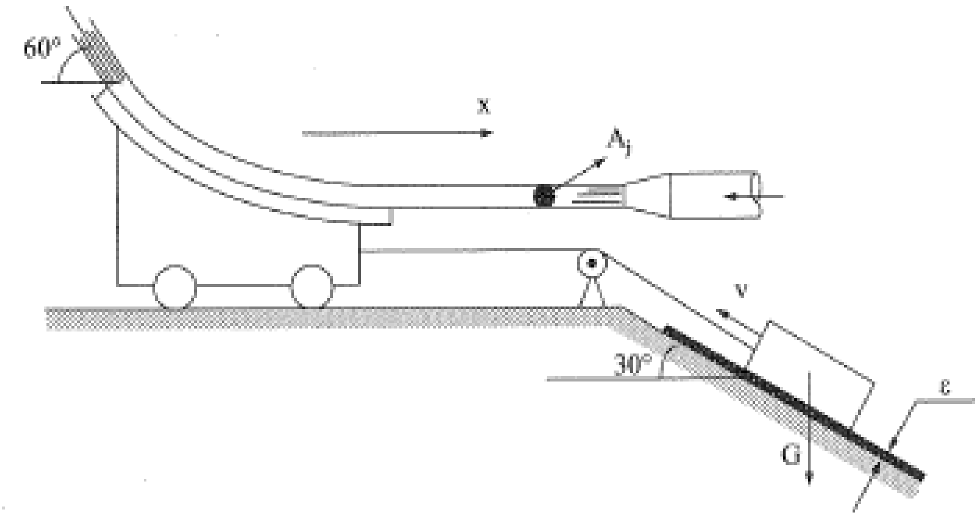
Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

4 - O jato de água ($\rho = 1000$ kg/m³) de área $A_j = 10^{-4}\ m^2$ incide com velocidade v_j na pá solidária ao carro, que se move sem atrito no plano horizontal. O carro, ao se mover por ação do jato, reboca um bloco de peso G = 20 N sobre um plano inclinado. Se entre a base do bloco de área $10^{-2}\ m^2$, e o plano inclinado existe uma camada lubrificante de óleo ($\mu = 0{,}1\ N.s/m^2$) de espessura $\varepsilon = 10^{-4}$ m, pergunta-se qual deve ser a velocidade v_j do jato em m/s para que o bloco se movimente no plano inclinado com velocidade constante v = 1 m/s?

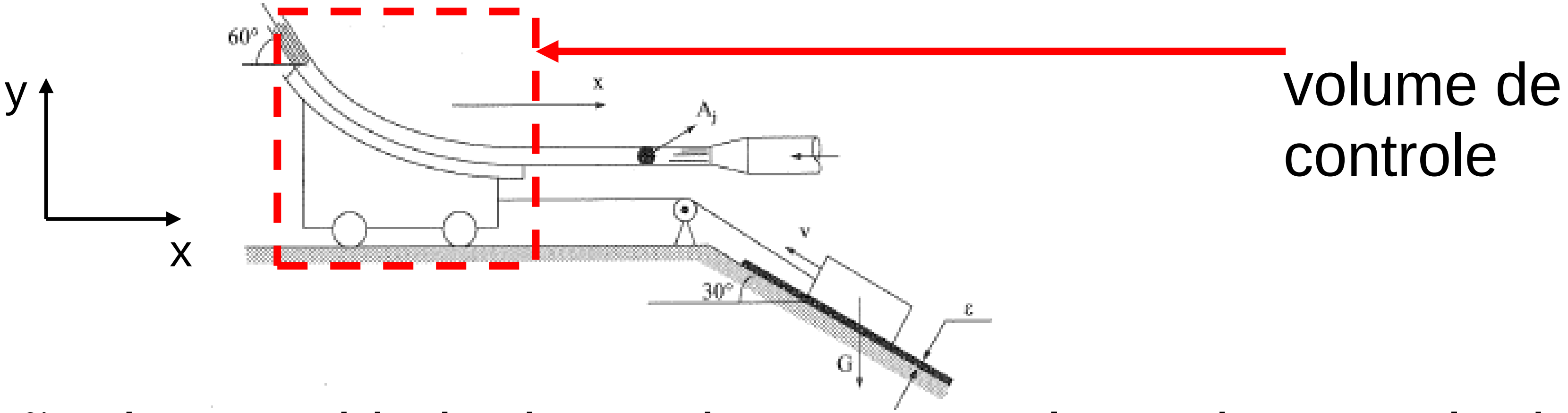


Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

4 - O jato de água ($\rho = 1000$ kg/m³) de área $A_j = 10^{-4}\ m^2$ incide com velocidade v_j na pá solidária ao carro, que se move sem atrito no plano horizontal. O carro, ao se mover por ação do jato, reboca um bloco de peso G = 20 N sobre um plano inclinado. Se entre a base do bloco de área $10^{-2}\ m^2$, e o plano inclinado existe uma camada lubrificante de óleo $(\mu = 0{,}1\, N.s/m^2)$ de espessura $\varepsilon = 10^{-4}$ m, pergunta-se qual deve ser a velocidade v_j do jato em m/s para que o bloco se movimente no plano inclinado com velocidade constante v = 1 m/s?



Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



Aplicando a equação da quantidade de movimento no volume de controle do carrinho(indicado na figura):

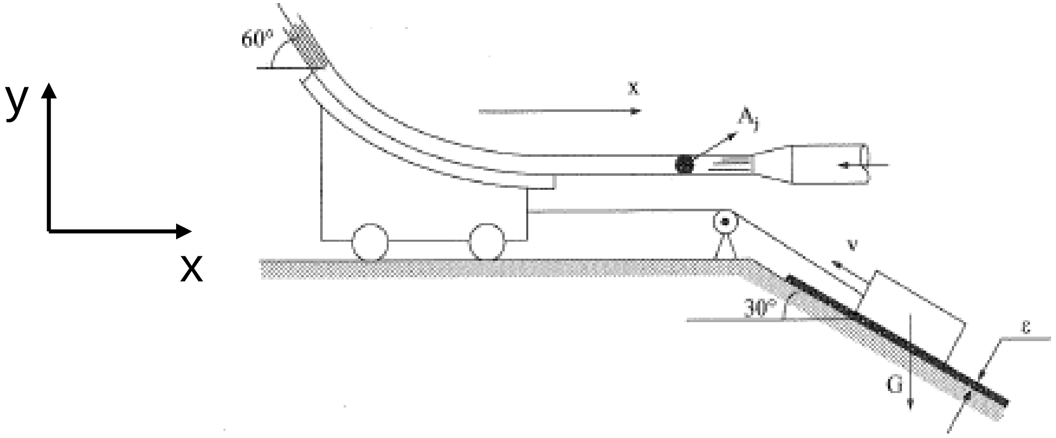
$$m_{\forall C}\vec{a}_{\forall C} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{V}_r \rho dV + \int_{SC} \vec{V}_r \rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} dA = \sum \vec{F}$$

Como se deseja a velocidade do sistema constante: $\vec{a}_{\forall C} = 0$

Assumindo que o comprimento do jato no carrinho tem um comprimento de 1m:

$$\forall_{jato} = A_{jato} l_{jato} = 10^{-4} \times 1 = 10^{-3} m^3$$

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



$$-V_{jato}\rho_{água}\left(v_{jato}-v\right)-\rho_{água}v_{jato}A_{jato}\left(v_{jato}cos60°-v\right)+$$
$$-\rho_{água}v_{jato}A_{jato}\left[-\left(v_{jato}-v\right)\right]=F_{viscosa}+Gcos60°$$

Na superfície entre o bloco e o plano inclinado:

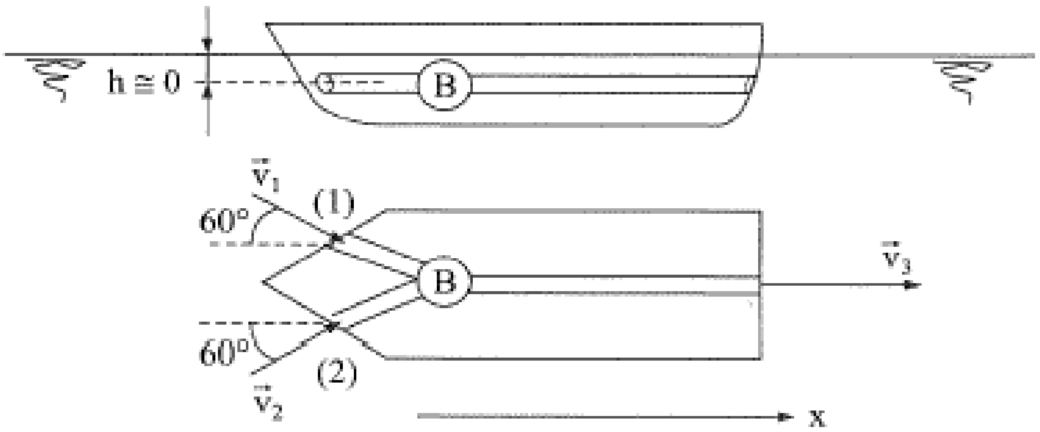
$$\tau=\mu\frac{v}{\varepsilon}=0{,}1\,\frac{1}{10^{-4}}=10^{3}\ N/m^{2}$$

$$F_{viscosa}=\tau A_{bloco}=10^{3}\times10^{-2}=10N$$

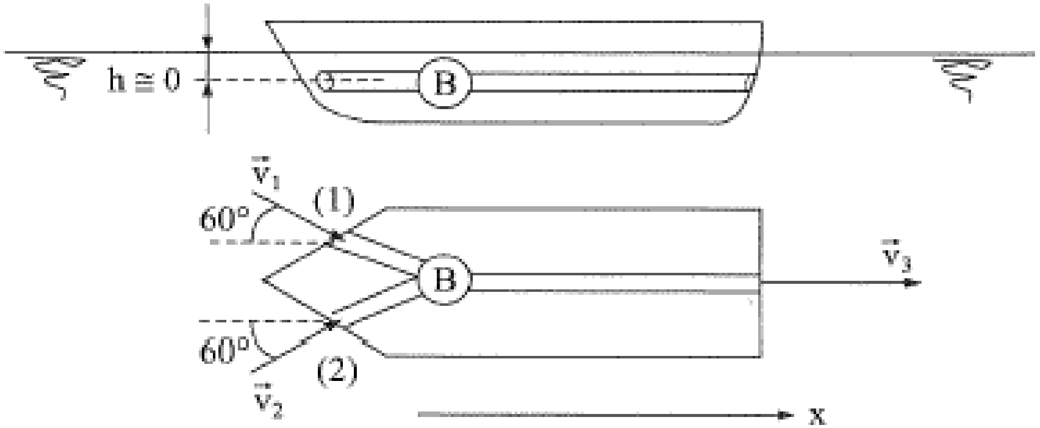
$$v_{jato}=20{,}97\ m/s$$

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

5 - O barco da figura tem um sistema de propulsão que consiste de uma bomba que succiona água na proa e a recalca na popa. Todos os tubos têm 5 cm de diâmetro e a vazão de saída é 50 L/s. Calcule a força de propulsão no instante da partida, isto é, com o barco em repouso. Admite-se que a pressão nas entradas e saídas seja praticamente a atmosférica $\rho = 1000$ kg/m³.



Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



Como os diâmetros dos tubos são iguais:

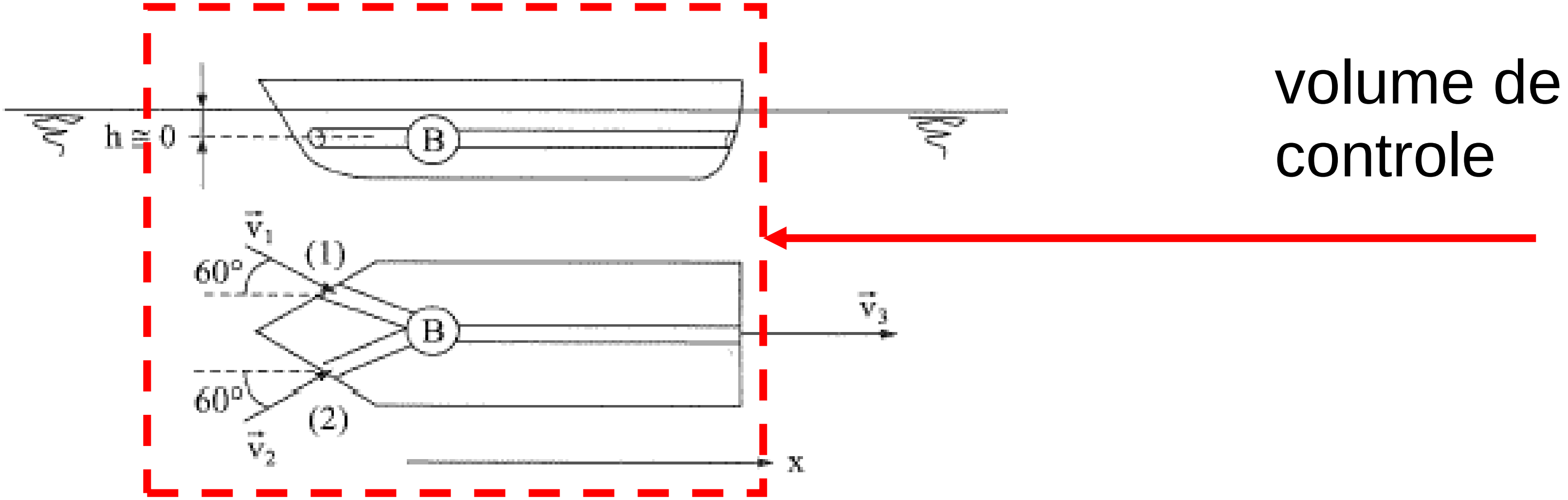
$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \frac{\dot{Q}_3}{2} = 25x10^{-3}\, m^3/s$$

$$v_1 = v_2 = \frac{\dot{Q}_1}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{25x10^{-3}}{\frac{\pi(0{,}05)^2}{4}} = 12{,}73\, m/s$$

$$\dot{Q}_3 = 50x10^{-3}\, m^3/s$$

$$v_3 = \frac{\dot{Q}_3}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{50x10^{-3}}{\frac{\pi(0{,}05)^2}{4}} = 25{,}46\, m/s$$

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

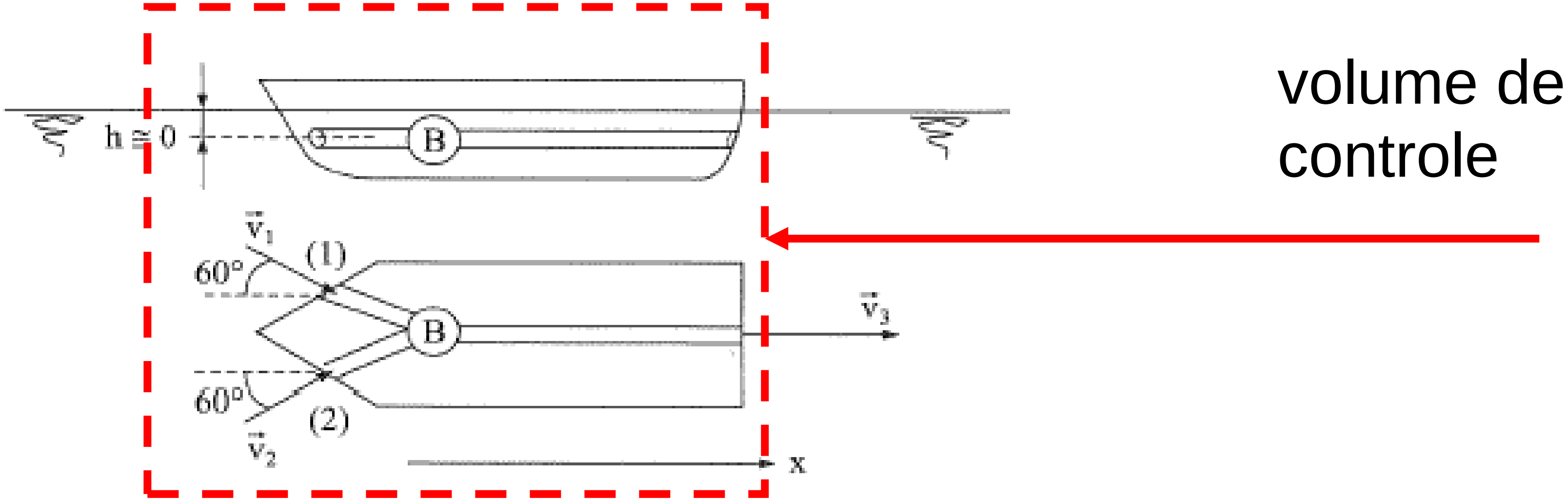


Adotando o volume de controle mostrado na figura acima e aplicando a conservação de quantidade de movimento na direção x temos:

$$m_{VC}\vec{a}_{VC} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\vec{V}_r \rho dV + \int_{SC}\vec{V}_r \rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} dA = \sum \vec{F}$$

Sendo que: $dV = 0$ $\quad \vec{a}_{VC} = 0$

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



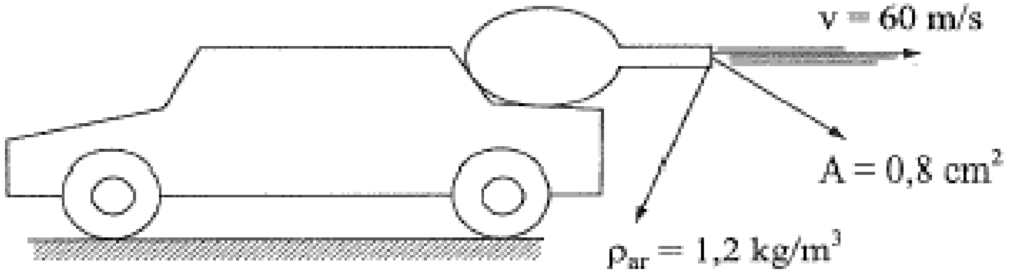
$$V_3\rho_{água}\underbrace{V_3A_3}_{\dot{Q}_3}+(-V_1cos60°)\rho_{água}\underbrace{V_1A_1}_{\dot{Q}_1}+(-V_2cos60°)\rho_{água}\underbrace{V_2A_2}_{\dot{Q}_2}=F_{propulsão}$$

Substituindo os valores temos: $F_{propulsão}=954{,}75\ N$

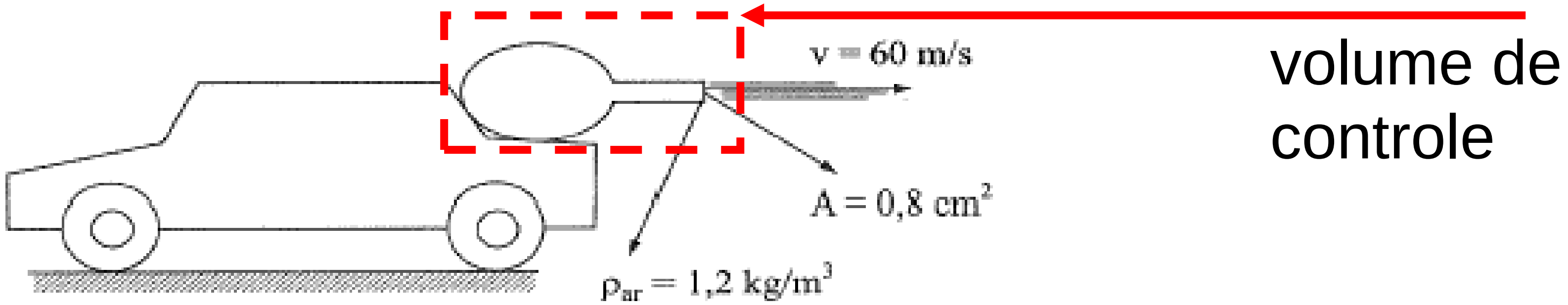
Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

6 - Um fabricante de brinquedos constrói um carrinho impulsionado pelo ar de uma bexiga. No estante inicial em que é liberado o ar, determinar:

a) A força de propulsão;
b) A pressão do ar da bexiga, desprezando a perda de carga e supondo o ar incompressível ($p_{atm} = 100$ kPa).



Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento

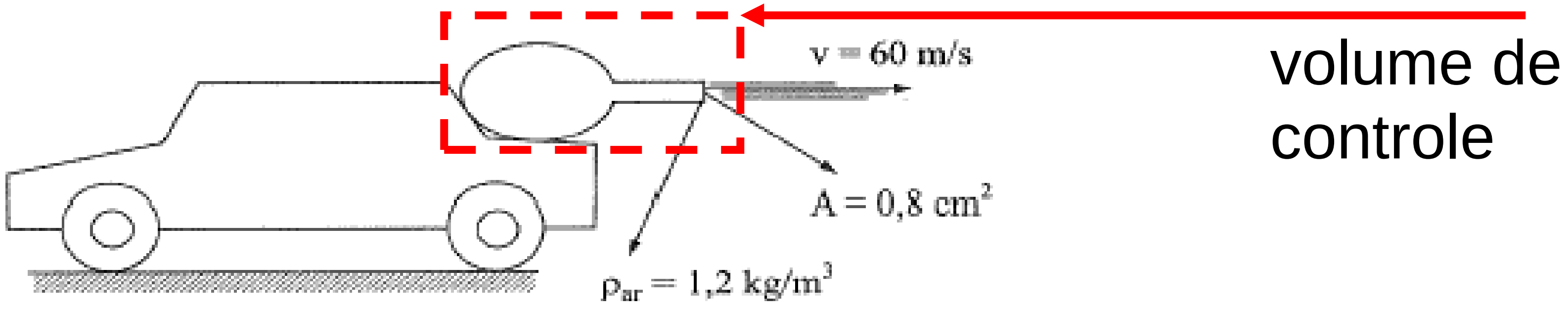


Assumindo o volume de controle mostrado na figura acima (bexiga), aplica-se a equação da quantidade de movimento, sendo: $d\forall = 0 \quad \vec{a}_{\forall C} = 0$

$$m_{\forall C}\vec{a}_{\forall C} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \vec{V}_r \rho dV + \int_{SC} \vec{V}_r \rho \vec{V}_r \cdot \hat{n} dA = \sum \vec{F}$$

$$F_{propulsão} = v_{ar}\rho_{ar}v_{ar}\mathrm{A} = 60 \times 1{,}2 \times 0{,}8x10^{-4} \times 60 = 0{,}3456\ N$$

Aula de exercícios – Equação da quantidade de movimento



Aplicando a equação de Bernoulli no volume de controle definido acima:

$$p_{entrada} + \frac{\rho_{entrada} V_{entrada}}{2} + \rho_{entrada} g z_{entrada} = p_{saída} + \frac{\rho_{saída} V_{saída}}{2} + \rho_{saída} g z_{saída}$$

Como:

$$V_{entrada} = 0;\ \rho_{entrada} = \rho_{saída}; z_{entrada} = z_{saída};\ V_{saída} = 60\, m/s\, ;\ p_{saída} = 100kPa$$

$$p_{entrada} = 102{,}16\, kPa(\text{absoluta})\text{ ou }2{,}16\text{ kPa}(\text{relativa})$$