Lista 2. As leis de Kepler e gravitação universal de Newton

Nestor Caticha *
Física Geral IFUSP
Universidade de São Paulo, CP66318, CEP
05315-970, São Paulo, SP, Brazil

25 de Outubro de 2012

Resumo

Esta lista é para a semana que começa no dia 2 de dezembro. A lista não é tão grande quanto parece. São apresentadas as equações para chegar, partindo das Leis de Newton, às leis de Kepler para os planetas. Voce pode usar seu livro favorito de fisica 1. A lista serve como um roteiro de estudo. O apêndice fornce a maior parte dos detalhes para desenvolver o trabalho. Faça o que puder. Tente fazer o resto.

1 Lista

1.1 Oscilador Harmônico

- Escreva as equações de Newton para o oscilador harmônico unidimensional, onde a força é dada por $F = -kx$.
- Mostre a que existe uma lei de conservação do tipo $E = mv^2/2 + U(x)$ é constante . Encontre $U(x)$.
- Encontre a solução geral, $x(t), v(t)$ a partir da equação

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

- Encontre o periodo T de oscilações. Qual é a relação entre T e a segunda derivada $\frac{d^2U}{dx^2}$?

*nestor@if.usp.br

1.2

- Considere um corpo percorrendo uma trajetória circular com velocidade angular uniforme. Isto significa que o módulo da velocidade $v = |\vec{v}|$ é constante e que o módulo do raio vetor $r = |\vec{r}|$ também. A aceleração é um vetor que aponta na direção do centro do círculo. Mostre que o módulo da aceleração é $a = v^2/r$.

- Suponha que o corpo é um planeta e no centro do círculo está o sol. Mostre que a terceira lei de Kepler ($R^3/T^2 = K$, a mesma constante para todos os planetas circulando o sol), é consistente com uma força gravitacional que cai com o quadrado da distância entre o planeta e o sol.

- Mostre geometricamente que a lei das áreas de Kepler é compatível com uma força central, isto é, a força no planeta aponta na direção do sol.

1.3 Problema de Newton-Kepler

Considere

- A segunda lei de Kepler diz que o raio vetor dos planetas varre áreas iguais em tempos iguais. Newton a usou para mostrar que a força gravitacional é central. Para isso usou (i) A força gravitacional gera mudança no estado de movimento ($\vec{F} \propto \vec{a}$)

- Mostre que a segunda lei de Kepler decorre da conservação do momento angular.

- Mostre que a parte radial da equação de Newton para o problema de Kepler pode ser escrita como

$$\ddot{r} = -\frac{dU(r)}{dr},$$

  e escreva $U(r)$

- Note que $U(r)$ tem uma contribuição puramente gravitacional e outra devido à rotação. Mostre que a primeira é atrativa e a segunda é repulsiva. Faça um esboço deste função.

- Encontre uma expressão da energia total conservada, que so dependa de $r(t)$ e de $\dot{r}(t)$

- Encontre o valor r_0 do raio que minimiza a energia potencial $U(r)$.

- Encontre o período de pequenas "oscilações" em torno de r_0. Use o fato que o período está relacionado com a segunda derivada $\frac{d^2U(r)}{dr^2}$. Para pequenas oscilações podemos aproximar o potencial por uma parábola e voltamos ao caso anteriormente estudado de oscilações harmônicas.

- Suponha agora o caso de uma órbita circular. Calcule o período de rotação tempo que demora para θ aumentar 2π). Expresse-o como função do momento angular. Compare com o item anterior.

- Mostre que uma elipse pode ser decrita em coordenadas polares pela equação
$$r(1+\epsilon\cos\theta)=p$$
, onde o centro de coordenadas polares esta em um dos focos e o ângulo θ se mede a partir da direção do eixo maior da elipse. O comprimento da linha que vai desse foco até a elpise, com $\theta=\frac{\pi}{2}$, é p e recebe o nome (gastando o latim) de *semilactus rectus*.

- Agora estamos prontos para mostrar que a teoria de Newton nos dá as leis de Kepler.

  Primeiro mostre que pela conservação da energia podemos escrever
$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{2(E-U)}$$
  Note que a conservação de momento $L=mr^2\dot{\theta}$, nos permite escrever
$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{L}{mr^2} && (1)\\ \frac{d\theta}{dr} &= \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr} && (2)\\ \frac{d\theta}{dr} &= \frac{L/mr^2}{\sqrt{2(E-U)}} && (3)\\ \int d\theta &= \int dr\frac{L/mr^2}{\sqrt{2(E-U)}} && (4)\end{aligned}$$
  Faça uma mudança de variáveis do tipo $u=-\frac{k}{r}+B$, onde k e B são constantes. A integral é agora exatamente igual à que resolvemos para o oscilador harmônico.

- Finalmente, escreva $\theta(r)$. Note que será da forma
$$\theta=\arccos\left(\frac{\frac{L}{r}-\frac{k}{L}}{\sqrt{2E+1/p}}\right).$$

- Finalmente escreva a equação acima como $r(1+\epsilon\cos\theta)=p$. Encontre os valores da ecentricidade ϵ e do semilactus rectum p em termos da energia total E, do momento angular L, da constante de Gravitação universal G, da massa do sol M e da massa do planeta r.

- Acabamos? .... Não. Continue pensando..... não precisa entregar. Inclua o fato que há uma força de reação sobre o sol. No foco não fica o centro do sol, mas o centro de massa do sistema planeta-sol. O método para obter a solução acima ainda pode ser usado.

  Pense como fica o caso em que há mais de dois corpos (e.g. Lua-Terra-Sol). Procure literatura sobre o problema de três corpos. Como levar em conta que a terra e o sol não são objetos pontuais mas estão distribuidos numa região doe espaço? Peocure entender que se essas regiões forem exatamente esféricas a solução acima encontrada continua válida. E se não for?

2 Apêndice: Fórmulas básicas de cálculo

usaremos algumas fórmulas que devem ser conhecidas de cursos anteriores. Se não forem conhecidas: abandone o curso de Gravitação e aprenda cálculo que será muito mais útil.

Derivada de um produto:

$$\frac{d(ab)}{dt} = \frac{d(a)}{dt}b + a\frac{d(b)}{dt} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Derivada de uma função de função, regra da cadeia. A grandeza y é dada como função de x, que por sua vez é função de t. Assim $y(t) = y(x(t))$. A derivada de y com respeito a t é dada por

$$\frac{d(y)}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

2.1 Algumas propriedades de vetores

Usaremos algumas poucas propriedades estudadas antes em Geometria Analítica e vetoers. Se estas propriedades não forem conhecidas, volte uma casa e fique fora uma jogada. Enquanto espera, estude.

As propriedades que usaremos são um subconjunto pequeno de propriedades que devem ser conhecidas. Olharemos para casos particulares em espaços de 3 ou menos dimensões.

2.1.1 Base Cartesiana em 3 dimensões

$$\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \tag{9}$$

2.1.2 Produto escalar

$$0 = \hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\jmath}.i = \hat{\jmath}.k = \hat{k}.j = \hat{\imath}.k = \hat{k}.i \tag{10}$$
$$1 = \hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.j = \hat{\jmath}.j = \hat{k}.k \tag{11}$$

As componentes de um vetor $\vec{A}$ numa base cartesiana são

$$A_x = \hat{A}.\hat{\imath} \tag{12}$$
$$A_y = \hat{A}.\hat{\jmath} \tag{13}$$
$$A_z = \hat{A}.\hat{k} \tag{14}$$
$$\tag{15}$$

Produto escalar entre dois vetores $\vec{A}.\vec{B}$ é dado em termos das suas componentes

$$\hat{A}.\hat{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{16}$$

O módulo de um vetor $\vec{A}$ será escrito como $|\vec{A}|$ ou simplesmente A e é dado por

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{\hat{A}.\hat{A}} \tag{17}$$
$$A^2 = A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z \tag{18}$$
$$= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \tag{19}$$

Se um vetor satisfaz $\vec{A} = 0$, todas as suas componentes são nulas.

3 coordenadas polares

$$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath} \tag{20}$$
$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} \tag{21}$$
$$\tag{22}$$

as derivadas temporais

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\hat{e}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\imath} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\jmath} \tag{23}$$
$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\imath} - \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\jmath} \tag{24}$$
$$\tag{25}$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{26}$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r \tag{27}$$

assim temos velocidade

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \tag{28}$$

$$= \frac{d(r\hat{e}_r)}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \tag{29}$$

$$= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{30}$$

e a aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \tag{31}$$

$$= \frac{d(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)}{dt} = \tag{32}$$

$$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta = \tag{33}$$

$$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{e}_\theta) + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{e}_r) \tag{34}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \tag{35}$$

4 Lei de Newton

A força exercida pelo sol num planeta ...(esquecendo massa reduzida....)

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{e}_r \tag{36}$$

Pela segunda Lei de Newton, a força no planeta causa uma aceleração $\vec{a}$:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{37}$$

Juntando 36 e 37 e usando a expressão para a a aceleração 38 em coordenadas esféricas, então

$$-G\frac{Mm}{r^2}\hat{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \tag{38}$$

Temos do lado esquerdo um expressão onde aparece o versor radial $\hat{e}_r$ e do lado direito o radial e o angular $\hat{e}_\theta$. Segue que a parte angular , o fator que multiplica $\hat{e}_\theta$ do lado direito deve ser zero:

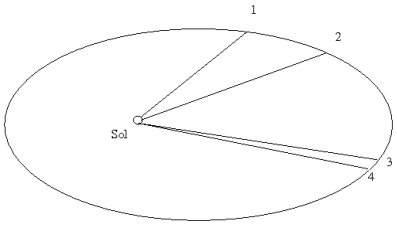

Figura 1: A área é varrida pelo raio vetor à mesma taxa temporal. $dA/dt =$ constante. Para pequenos ângulos, vale que $dA \sim \frac{1}{2}r^2 d\theta$. Portanto, no limite de $dt \to 0$, vale $dA/dt = \frac{1}{2}r^2 d\theta/dt = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = L/(2m)$, onde L é o módulo do momento angular, que é constante.

$$0 = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \tag{39}$$

multiplicando por r

$$0 = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} \tag{40}$$

$$= \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} \tag{41}$$

ou seja a quantidade $L = mr^2\dot{\theta}$ é constante. Note que este é o momento angular do planeta em torno do sol:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{42}$$

$$= mr^2\dot{\theta}\hat{k} \tag{43}$$

e deduzimos que o momento angular em torno do sol é constante: esta é a base para a **segunda lei de Kepler sobre a velocidade areolar** : o raio vetor do planeta ao sol varre areas iguais em tempos iguais.

5 Análise Dimensional

Considere novamente a equação 36. Olhemos as dimensões das quantidades que entram nesta fórmula. A principal interesse que nos leva a análise dimensional é que uma equação deve ser balanceada. Isto é, todos os termos devem ter exatamente a mesma dimensão.

Usaremos um sistema de unidades onde as quantidade independentes são T o tempo, R, o espaço, e M a massa.

Escrevemos a dimensão de uma quantidade X como $[X]$.

Começamos com : Força= massa $\times$ aceleração.

Aceleração $[a] = RT^{-2}$,

portanto: Força $[F] = MRT^{-2}$.

Podemos descubrir as dimensões de G,

$$[G] = [F][r^2]\frac{1}{[Mm]} == MRT^{-2} \times R^2 \times M^{-2} = M^{-1}R^3T^{-2} \tag{44}$$