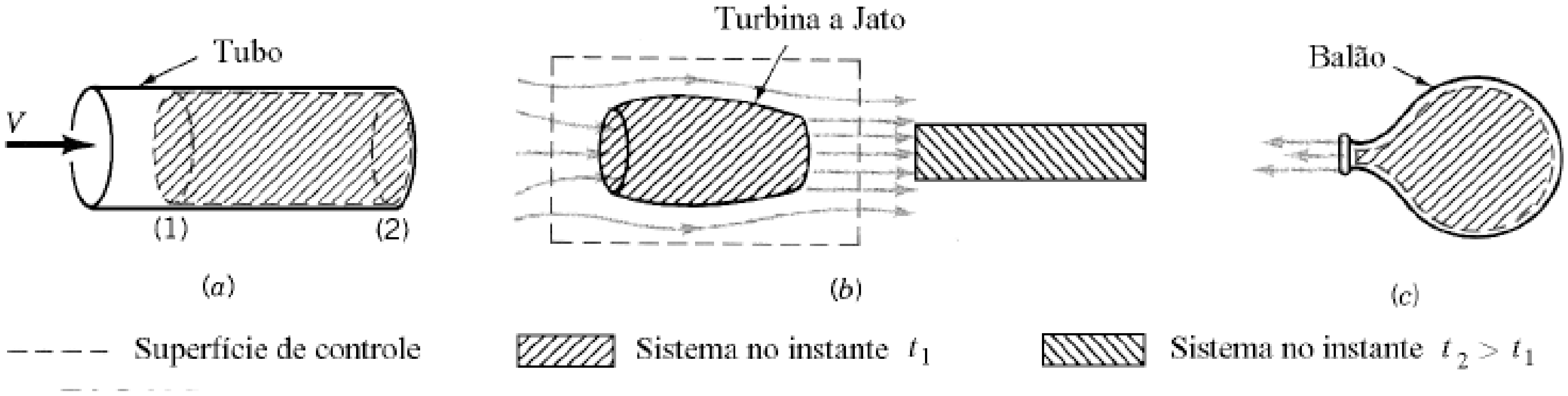
Formulação Integral das Equações da Mecânica dos Fluidos

1 Sistema e volume de controle

Sistema: certa quantidade de material com identidade fixa que pode se mover, escoar e interagir com o meio.

Volume de controle ($\cancel{V}C$): volume no espaço, delimitado por uma superfície de controle, através da qual o fluido pode escoar. Podem ser fixos ou móveis, indeformáveis ou deformáveis.*

*Semelhança entre sistema/descrição lagrangiana e $\cancel{V}C$/descrição euleriana.



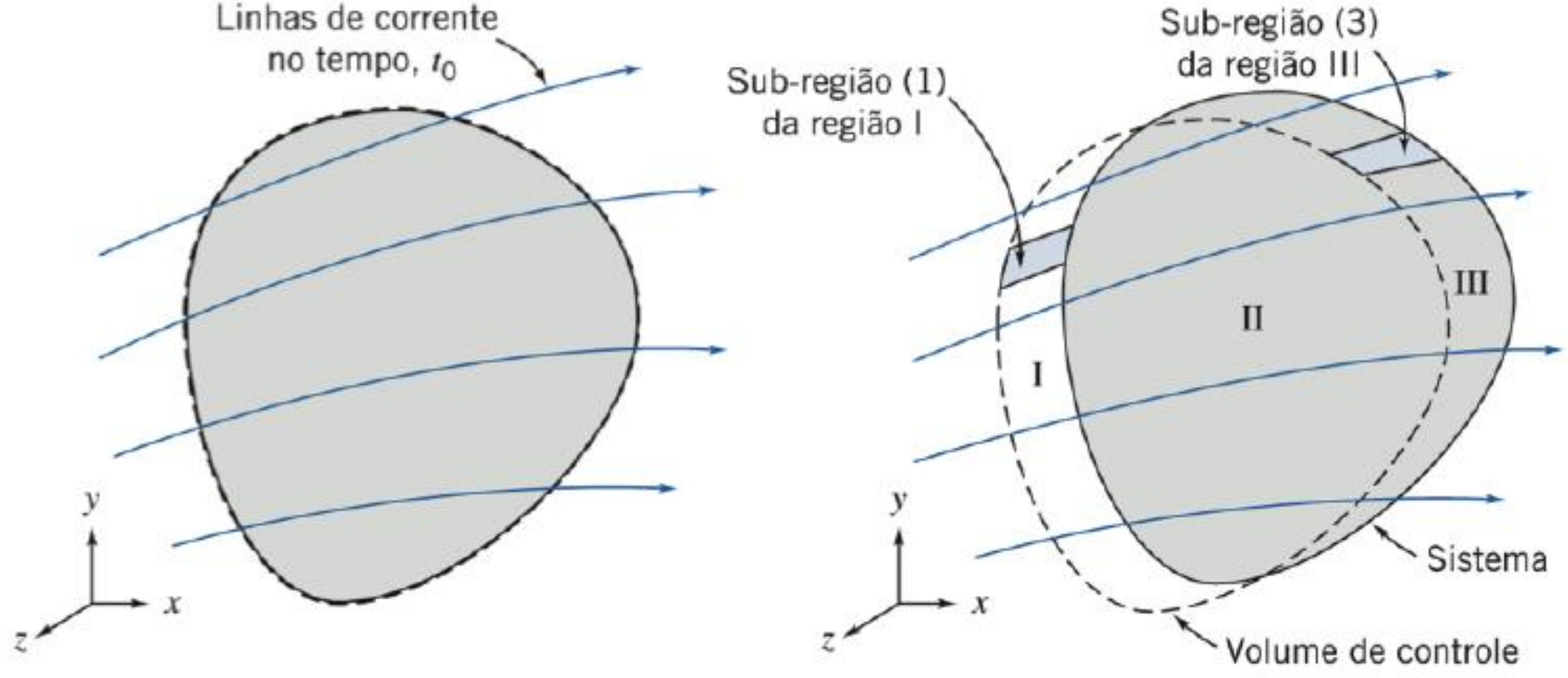
VC fixo e indeformável VC móvel e indeformável VC móvel e deformável

2 Teorema de transporte de Reynolds

Útil para a obtenção das leis de conservação formuladas para $\mathcal{V}C$.

Seja B um parâmetro físico e b a quantidade deste parâmetro por unidade de massa: $B_{\text{sist}} = \int_{\text{sist}} b \, \mathrm{d}m = \int_{\text{sist}} \rho b \, \mathrm{d}\mathcal{V}$

Queremos relacionar $\mathrm{d}B_{\text{sist}}/\mathrm{d}t$ com $\mathrm{d}B_{VC}/\mathrm{d}t$.



(*a*) Tempo, t_0 (*b*) Tempo, $t_0 + \Delta t$

$$\frac{\mathrm{D}B_{\text{sist}}}{\mathrm{D}t} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{B_{\text{sist}}(t_0 + \Delta t) - B_{\text{sist}}(t_0)}{\Delta t}$$

No instante t_0: $B_{\text{sist}}(t_0) = B_{\rlap{-}VC}(t_0)$

No instante $t_0 + \Delta t$: $B_{\text{sist}}(t_0 + \Delta t) = B_{\text{II}}(t_0 + \Delta t) + B_{\text{III}}(t_0 + \Delta t) = B_{\rlap{-}VC}(t_0 + \Delta t) - B_{\text{I}}(t_0 + \Delta t) + B_{\text{III}}(t_0 + \Delta t)$

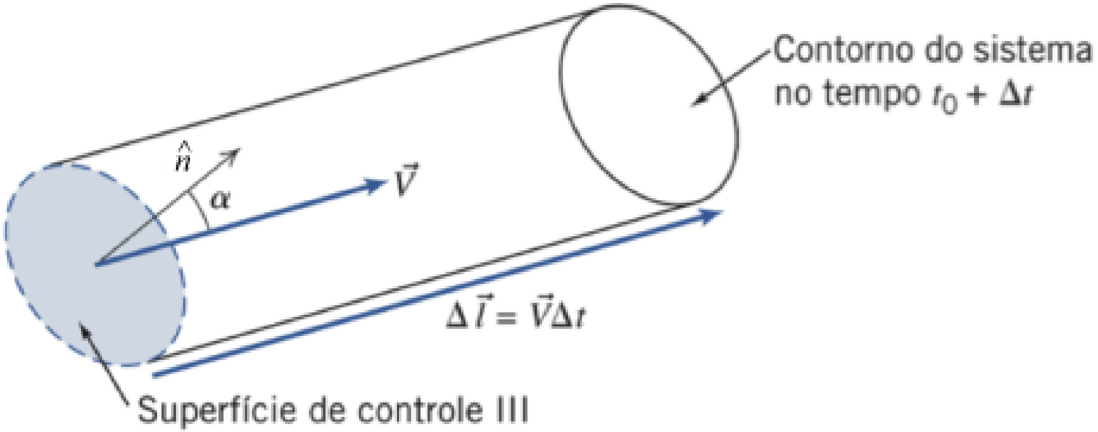
$$\frac{\mathrm{D}B_{\text{sist}}}{\mathrm{D}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\rlap{-}VC}(t_0 + \Delta t) - B_{\text{I}}(t_0 + \Delta t) + B_{\text{III}}(t_0 + \Delta t) - B_{\rlap{-}VC}(t_0)}{\Delta t}$$

$$\frac{\mathrm{D}B_{\text{sist}}}{\mathrm{D}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\rlap{-}VC}(t_0 + \Delta t) - B_{\rlap{-}VC}(t_0)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\text{III}}(t_0 + \Delta t)}{\Delta t} + - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\text{I}}(t_0 + \Delta t)}{\Delta t}$$

Avaliando cada termo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\rlap{-}VC}(t + \Delta t) - B_{\rlap{-}VC}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial B_{\rlap{-}VC}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\rlap{-}VC} \rho b \, \mathrm{d}\rlap{-}V\right)$$

Expressão para B_{III}:



Massa sai do $\cancel{V}C$ durante Δt, portanto $0 < \alpha < \pi/2$.

$$\mathrm{d}B_{\mathrm{III}}(t_0 + \Delta t) = (\rho_3 b_3)(\mathrm{d}\cancel{V}_3) = (\rho_3 b_3)(\Delta l \cos\alpha \,\mathrm{d}A)_3$$

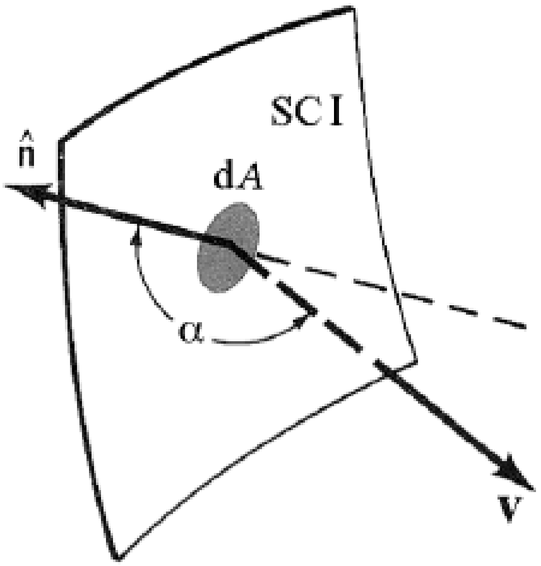
Para toda a região III:

$$B_{\mathrm{III}}(t_0 + \Delta t) = \left[\int_{SC\ \mathrm{III}} \rho b \Delta l \cos\alpha \,\mathrm{d}A \right]_{t_0 + \Delta t}$$

Assim: $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{B_{\mathrm{III}}(t_0+\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{SC\ \mathrm{III}}\rho b\Delta l\cos\alpha\,\mathrm{d}A\right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{SC\ \mathrm{III}}\rho b\frac{\Delta l}{\Delta t}\cos\alpha\,\mathrm{d}A=\int\limits_{SC\ \mathrm{III}}\rho b|\vec{V}|\cos\alpha\,\mathrm{d}A=\int\limits_{SC\ \mathrm{III}}\rho b\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A$$

Para a região I a análise é a mesma, só que $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \mathrm{d}\forall = \Delta l(-\cos\alpha)\,\mathrm{d}A$. Dessa forma:



$$\mathrm{d}B_{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)=\rho_1 b_1[\Delta l(-\cos\alpha)\,\mathrm{d}A]_1$$

$$B_{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)=\left[\int_{SC\ \mathrm{I}}-\rho b\Delta l\cos\alpha\,\mathrm{d}A\right]_{t_0+\Delta t}$$

$$-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{B_{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)}{\Delta t}=\int_{SC\ \mathrm{I}}\rho b\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A$$

Portanto:

$$\frac{\mathrm{D}B_{sist}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho b \, \mathrm{d}\forall + \int_{SC\ \mathrm{I}} \rho b \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A + \int_{SC\ \mathrm{III}} \rho b \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A$$

Como $SC = SC\ \mathrm{I} + SC\ \mathrm{III} + SC_p$, sendo SC_p a parte da SC sem fluxo ($\vec{V} = 0$ ou $\cos\alpha = 0$), chegamos a

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}B_{\mathrm{sist}}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho b \, \mathrm{d}\forall + \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A}$$

que é o <u>Teorema de Transporte de Reynolds</u> (TTR).[†]

[†]Interpretação física, relação com a derivada material, regime permanente

É preciso ressaltar que no termo de fluxo a velocidade $\vec{V}$ é medida em relação à SC. Portanto, para $\cancel{V}C$s móveis ou deformáveis, o TTR é:

$$\frac{\mathrm{D}B_{\text{sist}}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\cancel{V}C} \rho b \,\mathrm{d}\cancel{V} + \int_{SC} \rho b \vec{V}_r \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}A$$

onde $\vec{V}_r$ é a velocidade relativa à SC.

Se os escoamentos nas seções de entrada e saída puderem ser considerados unidimensionais e com propriedades uniformes,

$$\int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}A = \sum_{\text{saídas}} b_i \rho_i V_i A_i |\cos\alpha_i| - \sum_{\text{entradas}} b_j \rho_j V_j A_j |\cos\alpha_j| =$$

$$= \sum_{\text{saídas}} b_i \dot{m}_i - \sum_{\text{entradas}} b_j \dot{m}_j$$

3 Conservação de massa para o $\forall C$

Sistema: $\left.\dfrac{\mathrm{D}m}{\mathrm{D}t}\right|_{\text{sist}} = 0.$

Aplicando o TTR ($B = m$ e $b = 1$):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \,\mathrm{d}\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A = 0}$$

Casos especiais:

a) escoamento incompressível (ρ constante)

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\cancel{V}C} \mathrm{d}\cancel{V} + \rho \int_{SC} \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \cancel{V}}{\partial t} + \int_{SC} \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A = 0$$

Para $\cancel{V}C$ não deformável: $\int_{SC} \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A = 0$

Definições:

Vazão em volume: $Q \equiv \int_A \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A$

Velocidade média numa seção: $\bar{V} \equiv \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int_A \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A$

b) escoamento permanente ($\partial/\partial t = 0$)

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A = 0$$

c) escoamento uniforme

Velocidade e massa específica constantes na área da seção.

$$\int_{A_i} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A = \rho_i \vec{V_i} \cdot \hat{n} \, A_i = \rho_i V_i A_i \cos \alpha_i$$

Atenção aos sinais!