# 9 Cinemática de fluidos

## Assuntos

- Especificações Lagrangeana e Euleriana;
- Derivada material;
- Linhas de corrente;
- Trajetória;
- Linha de partículas.

## Referências bibliográficas

- Notas de aula;
- Kundu, Pijush K., Ira M. Cohen, and D. W. Dowling. "Fluid Mechanics 4th."(2008): 1-277;
- Apostila do Prof. Paulo Polito.

## 9.1 Introdução

Neste capítulo, o objetivo é descrever o comportamento do fluido, sem qualquer preocupação com a sua dinâmica, isto é, as forças que o fazem se movimentar. Quando observamos um objeto puntual, a descrição de seu comportamento é relativamente simples e, basicamente, a descrição de sua posição com o tempo ($\vec{r} = \vec{r}(t)$) é suficiente para se obter suas propriedades dinâmicas como, por exemplo, sua velocidade, aceleração e energia. POdemos, de maneira similar, tratar partículas específicas de um fluido da mesma maneira. Entretanto, devido ao número gigantesco de partículas em um fluido, o seu comportamento pode ser descrito através de um campo de propriedades, isto é, as características de um fluido em uma determinada posição e tempo.

## 9.2 Especificações

Há duas maneiras de se descrever a movimentação de um fluido. Em uma delas, esta descrição acompanha o deslocamento do próprio fluido, permitindo obter uma descrição espacial das propriedades, simular a maneira como tratamos objetos puntuais. Este método é chamado de Lagrangeano. Um bom exemplo de instrumento Lagrangeano são os derivadores. Estes instrumentos são lançados no mar e fluem com as correntes, medindo diversas propriedades como temperatura e salinidade. O seu deslocamento permite, também, estimar a velocidade.

A outra forma de se descrever o comportamento de um fluido é através do método Euleriano. Neste caso, as propriedades do fluido são determinadas em um ponto específico, sem qualquer preocupação com o deslocamento de suas partículas. Fundeios, por exemplo, são plataformas Eulerianas de amostragem dos oceanos. Neste método, as propriedades são descritas em um certo domínio, gerando um campo com seus valores.

No caso do método Lagrangeano, as propriedades ($P$) são definidas em termos de uma posição inicial e do tempo. Assim, podemos escrever $P = P(\vec{r}_0, t)$, onde $\vec{r}_0$ é a posição inicial. No caso Euleriano, estas propriedades são descritas em função de uma posição qualquer e do tempo na forma $P = P(\vec{r}_i, t)$.

## 9.3 Derivada total (material)

A maneira mais simples de se descrever o comportamento de um fluido é através da especificação Euleriana. Entretanto, não pode–se perder de vista que as forças aplicadas a um fluido são, de fato, aplicadas às partículas. Escrevendo, então, a posição de uma partícula como $\vec{r} = \vec{r}(t)$, podemos escrever que $P = P(\vec{r}(t), t)$ ou, de maneira equivalente em um sistema Cartesiano, $P = P(x(t), y(t), z(t), t)$. Assim, a derivada temporal de $P$ com relação ao tempo, usando a regra da cadeia, torna–se:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + w\frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} P
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Temos, então, que $\frac{dP}{dt}$ é a derivada total e pode ser escrita, também, como $\frac{DP}{Dt}$, lembrando que $\vec{u}$ é a velocidade da partícula e é dada por $\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$. Na Equação 9.1, temos que o primeiro termo do lado direito é a derivada local, e representa a variação temporal de $P$ em um ponto específico. Os outros termos do lado direito, ou outro termo na notação vetorial, representam a advecção, isto é, o transporte da propriedade $P$ no campo de correntes dado. Isto significa que, mesmo em um domínio onde as partículas mantenham suas propriedades, a advecção pode causar mudanças nas propriedades observadas, desde que o campo de velocidades e o gradiente de $P$ não sejam nulos.

**Exercise 19:**

Em um determinado domínio, a salinidade varia de leste para oeste de maneira constante, onde no extremo oeste a salinidade é igual a 37, e no exetremo leste, $50km$ distante, a salinidade é 36. Considerando que a salinidade é conservada para cada elemento do fluido, qual a taxa temporal desta propriedade em um ponto fixo, sabendo que a corrente neste domínio é igual a $0.2ms^{-1}$ na direção zonal.

## 9.4 Linhas de corrente (*streamline*)

Linhas de corrente são definidas de maneira que a velocidade em qualquer ponto é tangente a mesma linha em um determinado instante. Assim, uma linha de corrente $\vec{s}$ definida por $\vec{s} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ em um campo de velocidade $\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ por definição é dada por:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \tag{9.2}$$

É importante salientar que linhas de corrente não são, necessariamente, idênticas a trajetória de uma partícula. Uma outra maneira de se obter as linhas de corrente é fazendo $d\vec{s} \times \vec{u} = 0$, o que é equivalente a equação acima.

**Exercise 20:**

Determine a linha de corrente que passa pela origem em um campo de velocidades dado por:

$$\vec{u} = x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath}$$

Solução:

(i) Precisamos encontrar uma função $y = y(x)$ que descreva esta curva;

(ii) $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{2y}{x}$;

(iii) A solução da equação acima é dada por $y = x^2 + k$;

(iv) Em $x = 0$ e $y = 0$, $k = 0$. Assim, $y = x^2$.

**Exercise 21:**

Determine a linha de corrente que passa pela origem em um campo de velocidades dado por:

$$\vec{u} = t\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath}$$

## 9.5 Trajetória (*path line*)

A trajetória é determinada pelo caminho percorrido por uma partícula específica em um determinado período de tempo. De maneira bastante simples, podemos escrever que pequenos deslocamentos da partícula ($d\vec{S}$) são dados por simples integração da velocidade no tempo ($dt$). Assim, teremos:

$$d\vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{u}dt \tag{9.3}$$

Ainda, considerando um fluxo no plano horizontal, podemos escrever de maneira equivalente:

$$dx = x_0 + udt \tag{9.4}$$

$$dy = y_0 + vdt \tag{9.5}$$

## 9.6 Linha de partículas (*streakline*)

A linha de partículas é determinada pela conexão entre partículas que passaram em uma mesma localização em tempos distintos. É importante salientar que, para fluxos estacionários, a linha de corrente, trajetória e linha de partículas é coincidente.