

I. Derivadas de Ordem Superior e Polinômio de Taylor

1º Semestre de 2020

Cuidado: não conferi o texto!

1 Derivadas *parciais* de ordem superior

A partir da definição de derivada $\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \frac{d^3f}{dt^3}, \dots$ para funções de uma variável $t \in \mathbf{R}$, como vimos, é fácil generalizar o conceito e definir derivadas parciais para funções de várias variáveis a valores em $\mathbf{R}$, $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$, e também a valores em $\mathbf{R}^q$, $\mathbf{R}$, ou mesmo $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$. Assim, ficam estabelecidos os conceitos de:

(i) Derivadas parciais de 1a. ordem $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(x).$$

(ii) Derivadas parciais de 2a. ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_{p-1} \partial x_p}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_{p-1}}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(x).$$

(iii) Derivadas parciais de 3a. ordem $\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_l} \right) \right)$:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x), \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(x), \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}(x), \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_1}(x), \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}(x), \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial^3 f}{\partial x_p^3}(x).$$

(iv) Derivadas parciais de ordem m , $\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}}$, com $j_1, j_2, \dots, j_m \in \{1, 2, \dots, p\}$.

(•) Adota-se $\frac{\partial^0 f}{\partial x_j^0} = \frac{\partial^0}{\partial x_j^0} f := f$.

Uma função $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ é dita de classe C^m se tem todas as derivadas parciais de ordem $0, 1, \dots, m$, em Ω , e elas são contínuas.

Teorema 1 Se $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ é de classe C^m então para cada $k \leq m$, se $(j_1, j_2, \dots, j_k) \in 1, 2, \dots, p^k$ e $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ é uma reordenação de $(j_1, j_2, \dots, j_k)$ tem-se

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}.$$

As hipóteses deste teorema podem ser relaxadas: ver Teorema 40.8 no [R. G. Bartle, The Elements of Real Analysis].

2 Polinômio de Taylor

Polinômios de Taylor servem para aproximar uma função $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k perto de um ponto $\bar{x} \in \Omega$, assim como já o fizemos com o uso da diferencial ao aproximar $f(x)$ diferenciável em $\bar{x}$ por¹

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(x - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})(x_n - \bar{x}_n). \end{aligned} \quad (1)$$

Definição 1 *Seja $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^m . Se $0 \leq k \leq m$, e $\bar{x} \in \Omega$, o polinômio*

$$\begin{aligned} p_k(x) &= f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})(x_n - \bar{x}_n) + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{(j_1, j_2) \in \{1, \dots, p\}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}(\bar{x})(x_{j_1} - \bar{x}_{j_1})(x_{j_2} - \bar{x}_{j_2}) + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in \{1, \dots, p\}^3} \frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}}(\bar{x})(x_{j_1} - \bar{x}_{j_1})(x_{j_2} - \bar{x}_{j_2})(x_{j_3} - \bar{x}_{j_3}) + \\ &+ \cdots + \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_k) \in \{1, \dots, p\}^k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}(\bar{x})(x_{j_1} - \bar{x}_{j_1})(x_{j_2} - \bar{x}_{j_2}) \cdots (x_{j_k} - \bar{x}_{j_k}). \end{aligned} \quad (2)$$

é chamado *polinômio de Taylor de ordem k de f ao redor de $\bar{x}$* .

No caso em que $p = 2$ ($f(x) = f(x_1, x_2)$), usando o Teorema 1 podemos escrever:

$$\begin{aligned} p_k(x) &= f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})(x_2 - \bar{x}_2) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})(x_n - \bar{x}_n) + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^j \partial x_2^{2-j}}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1)^j (x_2 - \bar{x}_2)^{2-j} + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^j \partial x_2^{3-j}}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1)^j (x_2 - \bar{x}_2)^{3-j} + \\ &+ \cdots + \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^j \partial x_2^{k-j}}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1)^j (x_2 - \bar{x}_2)^{k-j}. \end{aligned} \quad (3)$$

¹Se $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ a expressão (14) fica

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(x - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + (x_1 - \bar{x}_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) + (x_2 - \bar{x}_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}_n) \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}). \end{aligned}$$

Teorema 2 *Seja $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^m , e seja $\bar{x} \in \Omega$. Para $0 \leq k \leq m$, seja p_k o polinômio de Taylor de ordem k de f ao redor de $\bar{x}$.*

Então o erro $R_k(x) = f(x) - p_k(x)$ satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|R_k(x)|}{\|x - \bar{x}\|^k} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|f(x) - p_k(x)|}{\|x - \bar{x}\|^k} = 0, k = 0, 1, \dots, m.$$

Além disso, se o segmento $\overline{x\bar{x}}$ de extremidades x e $\bar{x}$ está contido em Ω , então para cada $k = 0, 1, \dots, m - 1$, existe $\eta_{x,\bar{x}}^k \in \overline{x\bar{x}}$ tal que

$$R_k(x) = f(x) - p_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{k+1}) \in \{1, \dots, p\}^{k+1}} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_{k+1}}} (\eta_{x,\bar{x}}^k) (x_{j_1} - \bar{x}_{j_1}) (x_{j_2} - \bar{x}_{j_2}) \cdots (x_{j_{k+1}} - \bar{x}_{j_{k+1}}), \quad (4)$$

e se f é de classe C^{m+1} o mesmo vale para $k = m$.

A prova deste teorema é feita usando-se essencialmente o caso para uma variável, aplicado à função $g(t) = f(\bar{x} + t(x - \bar{x}))$.

No caso em que $p = 2$ ($f(x) = f(x_1, x_2)$):

$$R_k(x) = f(x) - p_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_1^j \partial x_2^{k+1-j}} (\eta_{x,\bar{x}}^k) (x_1 - \bar{x}_1)^j (x_2 - \bar{x}_2)^{k+1-j}. \quad (5)$$

3 Derivadas de ordem superior

Já definimos diferencial de uma função $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ num ponto $\bar{x} \in \Omega$. A diferencial de f no ponto $\bar{x}$ (quando existe) é uma transformação linear $Df(\bar{x}) : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$, e sua matriz quando consideramos as bases canônicas em $\mathbf{R}^p$ e $\mathbf{R}^q$ é a matriz jacobiana de f no ponto $\bar{x}$ (uma matriz $q \times p$):

$$\begin{aligned} Jf(\bar{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(\bar{x}) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x}) \right) \\ &= (D_{e_1}f(\bar{x}) \quad D_{e_2}f(\bar{x}) \quad \cdots \quad D_{e_p}f(\bar{x})). \end{aligned}$$

Por causa disso, usando representação matricial podemos escrever:

$$\begin{aligned} Df(\bar{x})(u) = Jf(\bar{x})u &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) + \cdots + u_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x}) \\ &= u_1 D_{e_1}f(\bar{x}) + u_2 D_{e_2}f(\bar{x}) + \cdots + u_p D_{e_p}f(\bar{x}). \end{aligned}$$

Observe que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x})$, ou seja, $D_{e_1}f(\bar{x}), D_{e_2}f(\bar{x}), \dots, D_{e_p}f(\bar{x})$, são vetores de $\mathbf{R}^q$, representados, portanto, como matrizes colunas na base canônica de $\mathbf{R}^q$. (Note o cuidado com a posição dos escalares $u_1, u_2, \dots, u_p$.)

3.1 Diferencial no caso $q = 1$

Quando $q = 1$, $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$, $Df(\bar{x}) : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ é um *funcional linear*², e sua matriz quando consideramos as bases canônicas em $\mathbf{R}^p$ e $\mathbf{R}$ é a matriz jacobiana de f no ponto $\bar{x}$ é uma **matriz linha** $1 \times p$:

$$\begin{aligned} Jf(\bar{x}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x}) \right) \\ &= (D_{e_1}f(\bar{x}) \quad D_{e_2}f(\bar{x}) \quad \cdots \quad D_{e_p}f(\bar{x})). \end{aligned}$$

Por outro lado, para uma tal f temos a definição de “gradiente de f no ponto $\bar{x}$ ”, que definido por

$$\nabla f(\bar{x}) = \text{grad}f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x}) \right) \in \mathbf{R}^p,$$

que é um vetor de $\mathbf{R}^p$ ortogonal à curva de nível de f que contém o ponto $\bar{x}$.

²Teorema de Representação de Rierz: “*Todo funcional linear de $L : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ é representado por um vetor de $w_L \in \mathbf{R}^p$ no seguinte sentido: $L(u) = \langle w_L | u \rangle, \forall u \in \mathbf{R}^p$ ”.*

Por causa disso, usando representação matricial podemos escrever, lembrando que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) = D_{e_j}f(\bar{x})$ são números reais:

$$\begin{aligned} Df(\bar{x})(u) = Jf(\bar{x})u &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) + \cdots + u_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x})u_p \\ &= \langle \nabla f(\bar{x}) \mid u \rangle = u^t \nabla f(\bar{x}) = (\nabla f(\bar{x}))^t u. \end{aligned}$$

Note que fixada a base canônica em $\mathbf{R}^p$:

- a representação matricial de $Df(\bar{x}) : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ é a **matriz linha**

$$Jf(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x}) \right),$$

- a representação matricial de $\nabla f(\bar{x}) \in \mathbf{R}^p$ é a **matriz coluna**

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

Elas são transpostas uma da outra.

3.2 Derivadas de ordem superior no caso $q = 1$

As derivadas de ordem superior de uma função $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$, $Df(\bar{x}) : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ num ponto $\bar{x} \in \Omega$ generalizam a noção de diferencial de f em $\bar{x}$.

Sabemos que f é de classe C^1 numa vizinhança de $\bar{x}$, existe $Df(\bar{x}) : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$, e é o *funcional linear* dado por

$$\begin{aligned} Df(\bar{x})(u) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x})u_p \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})u_i, \quad \forall u \in \mathbf{R}^p. \end{aligned}$$

Derivada de ordem 2

Se $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ for de classe C^2 definimos o *funcional bilinear*³

$$D^2f(\bar{x}) : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$$

por

$$D^2f(\bar{x})(u, v) = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})u_i v_j, \quad \forall (u, v) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p. \quad (6)$$

³Já estudamos funcionais bilineares no semestre anterior, alguns exemplos são:

(1) o produto escalar $\langle \mid \rangle : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$,

(2) o determinante de “matrizes” 2×2 , olhado como a função $d : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$d((a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$

Derivada de ordem 3

Se $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ for de classe C^3 definimos o *funcional tribilinear*⁴

$$D^3 f(\bar{x}) : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$$

por

$$D^3 f(\bar{x})(u, v, w) = \sum_{i,j,k=1}^p \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\bar{x}) u_i v_j w_k, \quad \forall (u, v, w) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p. \quad (7)$$

Derivada de ordem m

De modo análogo, se $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ for de classe C^m podemos definir

$$D^m f(\bar{x}) : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \times \cdots \times \mathbf{R}^p = (\mathbf{R}^p)^m \rightarrow \mathbf{R}$$

por

$$D^m f(\bar{x})(u^1, u^2, \dots, u^m) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^p \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} u_{i_1}^1 \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}(\bar{x}) u_{i_1}^1 u_{i_2}^2 \cdots u_{i_m}^m, \quad (8)$$

$$\forall (u^1, u^2, \dots, u^m) \in (\mathbf{R}^p)^m.$$

3.3 Forma quadrática importante, e uma generalização

Uma forma quadrática em $\mathbf{R}^p$ é uma função $Q : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ que é homogênea de ordem $k = 2$, isto é,

$$Q(\lambda u) = \lambda^2 Q(u), \quad \forall u \in \mathbf{R}^p, \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Veja que uma transformação linear tem essa propriedade para $k = 1$ (homogeneidade).

Uma forma homogênea de ordem k em $\mathbf{R}^p$ é uma função $H : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ satisfazendo

$$H(\lambda u) = \lambda^k H(u), \quad \forall u \in \mathbf{R}^p, \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Formas homogêneas de ordem k em $\mathbf{R}^p$ podem ser obtidas a partir de formas (ou funcionais) k -lineares. Se $\Gamma : \mathbf{R}^{pk} \rightarrow \mathbf{R}$ é uma forma k -linear em $\mathbf{R}^p$, a função $\bar{\Gamma} : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$\bar{\Gamma}(u) = \Gamma(u, u, \dots, u), \quad \forall u \in \mathbf{R}^p,$$

é uma forma k -linear em $\mathbf{R}^p$.

Serão importantes para nós:

A forma quadrática definida a partir derivada $D^2 f(\bar{x})$ (ver (6)):

$$\overline{D^2 f(\bar{x})} : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$$

definida por

$$\overline{D^2 f(\bar{x})}(u) := D^2 f(\bar{x})(u, u), \quad \forall u \in \mathbf{R}^p. \quad (9)$$

⁴Já estudamos um funcional multilinear importante no semestre anterior:

o determinante de “matrizes” $n \times n$, olhado como a função $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $d(A_1, A_2, \dots, A_n) = \det A$, onde $A_1, A_2, \dots, A_n$ são as linhas da matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, é n -linear.

Usualmente, para simplificar notação, escreveremos

$$\overline{D^2 f(\bar{x})}(u) := D^2 f(\bar{x})(u, u) = D^2 f(\bar{x})(u)^2.$$

Também estenderemos essa notação para as formas homogêneas de ordem k , usando:

$$\begin{aligned} k = 1 & \quad Df(\bar{x})(u) && \text{como usual,} \\ k = 2 & \quad D^2 f(\bar{x})(u)^2 && \text{para } D^2 f(\bar{x})(u, u), \\ k = 3 & \quad D^3 f(\bar{x})(u)^3 && \text{para } D^3 f(\bar{x})(u, u, u), \\ & \quad \vdots \\ k \in \mathbf{N} & \quad D^k f(\bar{x})(u)^k && \text{para } D^k f(\bar{x})(u, u, \dots, u). \end{aligned} \quad (10)$$

Note que se f é de classe C^m e $1 \leq k \leq m$ temos

$$\begin{aligned} Df(\bar{x})(u) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}u_p = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})u_j, \\ D^2 f(\bar{x})(u)^2 &= \sum_{(j_1, j_2) \in \{1, \dots, p\}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}(\bar{x})u_{j_1}u_{j_2}, \\ D^3 f(\bar{x})(u)^3 &= \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in \{1, \dots, p\}^3} \frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}}(\bar{x})u_{j_1}u_{j_2}u_{j_3}, \\ &\quad \vdots \\ D^k f(\bar{x})(u)^k &= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_k) \in \{1, \dots, p\}^k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(\bar{x})u_{j_1}u_{j_2} \dots u_{j_k}. \end{aligned} \quad (11)$$

No caso em que $p = 2$ e f é C^2 , ($f(x) = f(x_1, x_2)$ e $u = (u_1, u_2)$), podemos escrever, usando o teorema 1, para $1 \leq k \leq m$:

$$\begin{aligned} Df(\bar{x})(u) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})u_j = \sum_{j=0}^1 \frac{\partial f}{\partial x_1^j \partial x_2^{1-j}}(\bar{x})u_1^j u_2^{1-j}, \\ D^2 f(\bar{x})(u)^2 &= \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^j \partial x_2^{2-j}}(\bar{x})u_1^j u_2^{2-j} \\ D^3 f(\bar{x})(u)^3 &= \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^j \partial x_2^{3-j}}(\bar{x})u_1^j u_2^{3-j} \\ &\quad \vdots \\ D^k f(\bar{x})(u)^k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^j \partial x_2^{k-j}}(\bar{x})u_1^j u_2^{k-j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Acima, foi usada a notação $\frac{\partial f}{\partial x_1^1 \partial x_2^0}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})$ e $\frac{\partial f}{\partial x_1^0 \partial x_2^1}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})$.

Polinômio de Taylor usando as derivadas de ordem superior

É agora imediato que se $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^m numa vizinhança de um ponto $\bar{x} \in \Omega$, o Polinômios de Taylor de ordem k de f ao redor de $\bar{x}$ ($0 \leq k \leq m$) dado por (2) fica

$$p_k(x) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} D^2 f(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \frac{1}{3!} D^3 f(\bar{x})(x - \bar{x})^3 + \cdots + \frac{1}{k!} D^k f(\bar{x})(x - \bar{x})^k. \quad (13)$$

Na fórmula acima, o “expoente” no vetor $u = (x - \bar{x})$ deve ser olhado como em (10) e (11).

No caso particular em que $p = 2$ ($f(x) = f(x_1, x_2)$), podemos escrever então, usando o teorema 1:

$$\begin{aligned} p_k(x) &= f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) u_j + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^j \partial x_2^{2-j}}(\bar{x}) (x_1 - \bar{x}_1)^j (x_2 - \bar{x}_2)^{2-j} + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^j \partial x_2^{3-j}}(\bar{x}) (x_1 - \bar{x}_1)^j (x_2 - \bar{x}_2)^{3-j} + \\ &+ \cdots + \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^j \partial x_2^{k-j}}(\bar{x}) (x_1 - \bar{x}_1)^j (x_2 - \bar{x}_2)^{k-j}. \end{aligned} \quad (14)$$