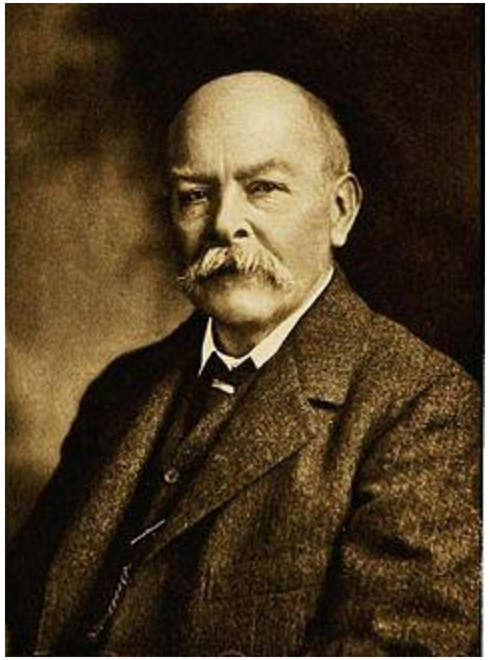
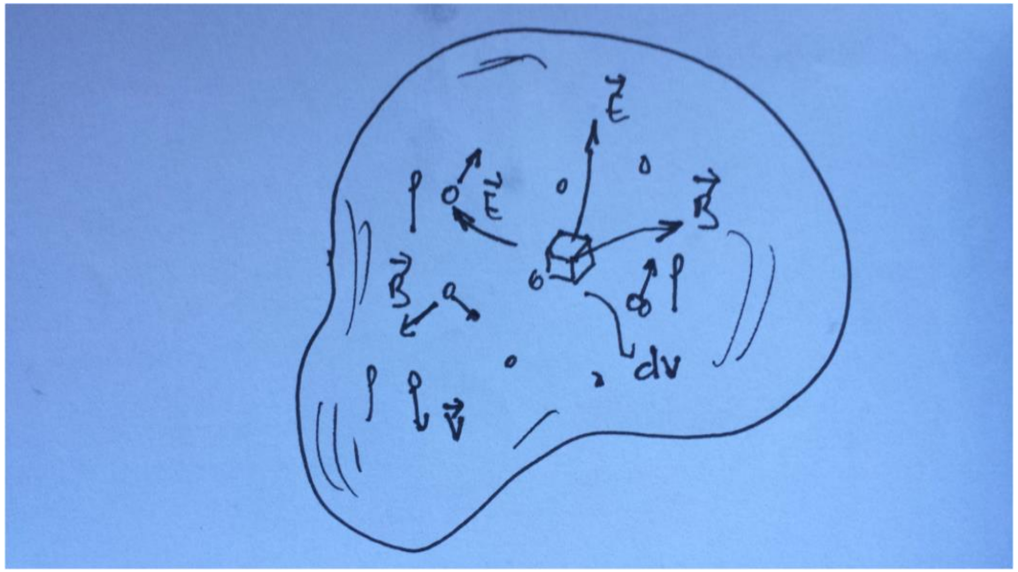
Teorema de Poynting

<u>John Henry Poynting</u> – físico inglês; aluno de Maxwell na Universidade de Cambridge
Artigo original: J. H. Poynting; "On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field“; *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* <u>175,</u> 343 (1884).
doi:10.1098/rstl.1884.0016





Campos → cargas se deslocam → correntes $\vec{J} = \rho\vec{v}$ → campos
Como energia é transportada e trabalho realizado pelos campos, de forma <u>auto-consistente</u>?

Carga dentro de um elemento de volume: $dV \; \rightarrow dq = \rho dV$

- Força atuante sobre esta carga: $d\vec{F} = dq\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = \rho\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)dV$

<u>Importante</u> : $\vec{v}$ é a velocidade no elemento de volume onde $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estão sendo medidos

- Potência para deslocar o elemento de volume:

$$dP = d\vec{F}.\vec{v} = \rho\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}dV = \vec{E} \cdot (\rho\vec{v})dV = \vec{E} \cdot \vec{j}dV$$

Portanto,

$$P = \frac{dW}{dt} = \int \left(\vec{E} \cdot \vec{j}\right)dV \qquad \left[\frac{V}{m}\frac{A}{m^2}m^3 = VA = Watt\right]$$

<u>Auto consistência</u>: campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ criados pelas cargas e correntes sobre as quais atuam

- Lei de Ampére: $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \;\rightarrow\; \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Relação vetorial: $\nabla \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b}$

$$\rightarrow \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) - \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)\right] = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$$

Para qualquer vetor: $\frac{\partial a^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{a} \cdot \vec{a}) = 2\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \rightarrow \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{2}\right); \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2}\right)$

Substituindo na expressão para:

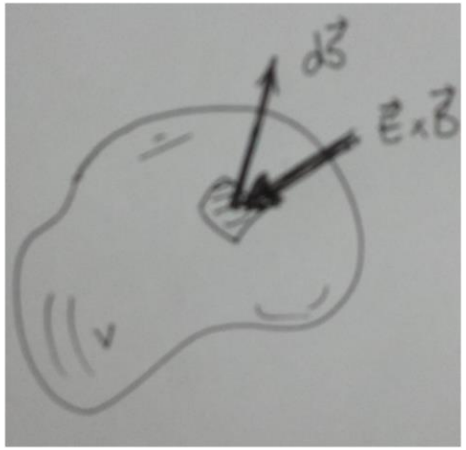
$$P = \int \left(\vec{E} \cdot \vec{j}\right) dV = \int \left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0}{2}E^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)\right] dV$$

$\rightarrow$ **Teorema de Poynting**

$$\boxed{\int \left(\vec{E} \cdot \vec{j}\right) dV + \frac{d}{dt}\int \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) dV = -\int \nabla \cdot \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} dV = -\oint \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}}$$

Significado Físico

- $\int(\vec{E}\cdot\vec{j})dV \rightarrow$ potência dissipada por efeito Joule (colisões) no volume; $\vec{E} = \eta\vec{j}$ (*)
- $\int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV \rightarrow$ energia armazenada no campo elétrico dentro do volume
- $\int \frac{B^2}{2\mu_0} dV \rightarrow$ energia armazenada no campo magnético dentro do volume
- $\oint \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\cdot d\vec{S} \rightarrow$ fluxo de energia eletromagnética através da superfície que delimita o volume (notar que o vetor $d\vec{S}$ aponta para fora do volume)



Vetor de Poynting

Fluxo de energia eletromagnética por unidade de área por unidade de tempo [potência/área]

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{E}\times\vec{H}}$$

Forma diferencial do Teorema de Poynting

Vamos retornar à expressão para conservação de energia antes de aplicar o Teorema de Gauss:

$$\int \left[(\vec{E} \cdot \vec{j}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}\right) \right] dV = 0$$

Como o volume é arbitrário, o integrando tem que ser nulo, ou seja,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}}$$

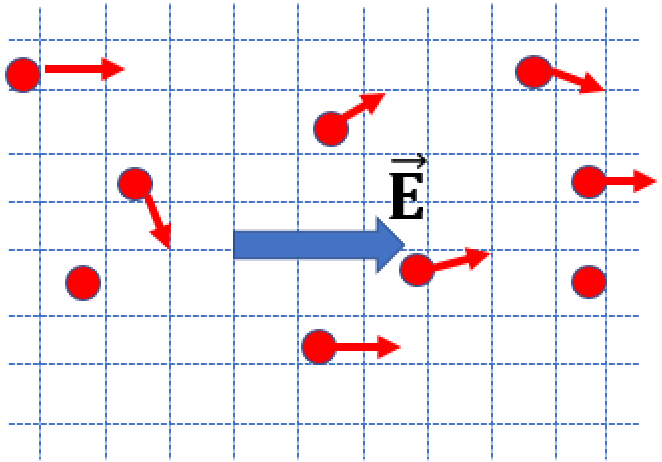
onde $u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ é a *densidade de energia* armazenada nos campos elétrico e magnético.

Nota importante

- Expressão obtida para conservação de energia só é válida no vácuo, ou seja, quando todas as fontes de carga e corrente de um meio forem consideradas explicitamente.
- Quando as cargas de polarização e as correntes de magnetização forem incluídas na constante dielétrica ϵ e permeabilidade μ do meio, só se pode fazer as trocas $\epsilon_0 \to \epsilon$; $\mu_0 \to \mu$ se estas grandezas forem constantes, independente da frequência.

(*) <u>Modelo simples de resistividade</u>

- Considere cargas se deslocando em um meio material, aceleradas por um campo elétrico $\vec{E}$ e colidindo com estrutura cristalina com frequência de colisão γ.
- Suponha que em cada colisão cada portador, de carga q e massa m, perca todo seu momento na direção de $\vec{E}$ e que a densidade de portadores seja n.



1. Justifique a seguinte equação de movimento para a cargas

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - m\gamma\vec{v}$$

2. Mostre que a solução para esta equação é

$$\vec{v}(t) = \frac{q}{m\gamma}\vec{E}(1 - e^{-\gamma t})$$

3. Mostre que, no regime permanente $t \to \infty$, obtêm-se $\vec{E} = \eta\vec{j}$; $\eta = m\gamma/nq^2$