Dicas para o ex 7

Álgebra 1 para licenciatura

MAT0120

Vou realizar a prova do item (a). Os próximos itens são semelhantes. Para demonstrar esse exercício vamos precisar usar os aximas para números inteiros dados nas primeiras aulas do curso.

Demonstração. Temos que $P = \{a \in \mathbb{Z} : a > 0\}$. Queremos mostrar que se $a \in P$ e $b \in P$ então $(a + b) \in P$. Note que como o enunciado está usando relação de ordem, é válido que voltemos nossa atenção para os axiomas de ordem.

Como $a \in P$ então $a \geq 0$ e $a \neq 0$. Analogamente, $b \geq 0$ e $b \neq 0$. Daí. pelo axioma A.14 (pág.19)

$$0 + b \leq a + b \Rightarrow b \leq a + b \tag{1}$$

Usando o axioma $A.12$ (transitividade), como $0 \leq b$ e $b \leq a + b$, obtemos que

$$0 \leq a + b \tag{2}$$

Agora, vamos mostrar que $a + b \neq 0$. Suponhamos que $a + b = 0$ daí $a = -b$. Pela prop. 1.2.5(PROVE)

$$-b \leq 0$$

Com efeito, $a \leq 0$ e $a \neq 0$, ou seja, $a < 0$, contradição. Assim, concluímos que $a + b = 0$ e, portanto, $a + b \in P$.

□

Os outros itens se valem do mesmo tipo de raciocínio, isto é, devem usar os axiomas sobre números inteiros.