Potenciais Escalar e Vetor

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\rightarrow$ campo $\vec{B}$ pode ser derivado de uma função vetorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$, denominada *Potencial Vetor*, através da relação

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

porque a divergência de um rotacional é identicamente nula.

Lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \;\rightarrow\; \nabla \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right] = 0$$

Como o rotacional de um gradiente também é identicamente nulo, podemos escrever o vetor entre colchetes como o gradiente de uma função escalar $\phi(\vec{r}, t)$, denominada *Potencial Escalar*, através da relação

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \;\rightarrow\; \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Arbitrariedade na definição do Potencial Vetor

- Função vetorial definida se fontes de fluxo e circulação especificadas

$$\nabla \cdot \vec{F} = s; \quad \nabla \times \vec{F} = \vec{c}$$

- Potencial vetor $\vec{A} \;\; \rightarrow \;\; \vec{c} = \vec{B}$, mas *s* indefinido.

Equações para os potenciais

$$\nabla . \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \;\rightarrow\; \nabla \cdot \left[-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \;\rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \rightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \left[\vec{j} - \epsilon_0 \left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) \right]$$

Relação vetorial: $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_o \vec{j} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)}$$

Conveniência de utilizar potenciais

Campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ $\rightarrow$ seis incógnitas, as componentes de cada campo

Potenciais ϕ e $\vec{A}$ $\rightarrow$ quatro incógnitas

Dificuldade

Equações para ϕ e $\vec{A}$ mais aparentemente mais complexas e com os dois potenciais aparecendo de forma acoplada. Arbitrariedade em $\nabla \cdot \vec{A}$ permite desaclopla-las.

Transformações de Calibre

Grandezas físicas medidas: $\vec{E}$ e $\vec{B}$; qualquer transformação dos potenciais que deixe os campos invariantes é válida.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha} \;\; \rightarrow \; \vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{\alpha}$$

Invariância campo: $B' = \vec{B} \; \rightarrow \; \nabla \times \vec{\alpha} = 0 \;\; \rightarrow \vec{\alpha} = \nabla\lambda; \lambda(\vec{r}, t)$ função escalar.

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\phi' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\nabla\left(\phi' + \frac{\partial \lambda}{\lambda t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Invariância de campo: $\vec{E}' = \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$

<u>Conclusão</u>: campos elétrico e magnético não são alterados se os potenciais forem transformados de acordo com as seguintes *Transformações de Calibre*

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda\,;\ \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Escolhas mais utilizadas para $\nabla \cdot \vec{A}$

<u>Calibre de Coulomb</u>

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \ \rightarrow \boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0};\ \ \nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)}$$

Calibre de Lorentz

Para simplificar a equação para $\vec{A}$, é feita a escolha $\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$.

Equações para ϕ e $\vec{A}$ ficam da mesma forma, equação de onda com fonte

$$\boxed{\nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}}$$

Exercício

Partindo das equações para ϕ e $\vec{A}$ no Calibre de Coulomb, mostre que as equações no Calibre de Lorentz são obtidas com a escolha

$$\nabla^2 \lambda = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi'}{\partial t}$$

Significado Físico (?) do Potencial Vetor

- Potencial escalar → energia eletrostática de uma distribuição de cargas

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})dV$$

- Energia magnética → não é expressa em termos de $\vec{j}$ e $\vec{A}$

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 dV$$

Papel de $\vec{A}$ em Física: importante em Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

- Mecânica Clássica → momento canônico na formulação Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{v}\cdot\vec{A};\;\; p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \;\rightarrow \vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

Momento canônico $\vec{p}$ não é conservado na transformação de calibre: $\vec{p}' = \vec{p} + q\nabla\lambda$!

Transfomação de calibre da Lagrangeana: equações de movimento não afetadas se

$$\mathcal{L}'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \mathcal{L}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + q\frac{d}{dt}\lambda(\vec{q},t);\;\; \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla$$

- Mecânica Quântica → efeito Aharonov-Bohm
  www.slideshare.net/AnzarAli/aharonaov-bohm-effect

$$\psi_1 = Ae^{ikx_1} \qquad \psi_2 = Ae^{ikx_2}$$

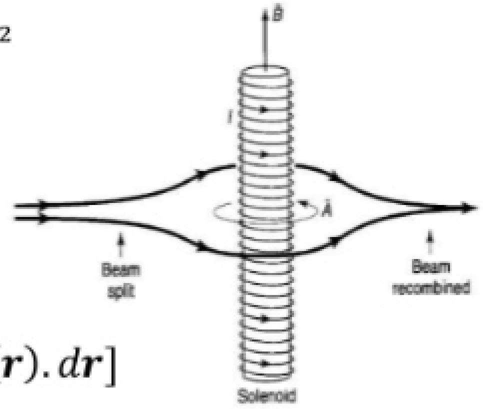
$$\Delta\mathbf{\Phi}_0 = k(x_1 - x_2)$$

$$\Delta\mathbf{\Phi} = g_1 - g_2$$

$$\Delta\mathbf{\Phi} = e/\hbar\left[\int_{C_1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}).\,d\boldsymbol{r} - \int_{C_2} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}).\,d\boldsymbol{r}\right]$$

$$\Delta\mathbf{\Phi} = e/\hbar \oint \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}).\,d\boldsymbol{r}$$

$$\boxed{\Delta\mathbf{\Phi} = e\varphi_{m/\hbar}}$$



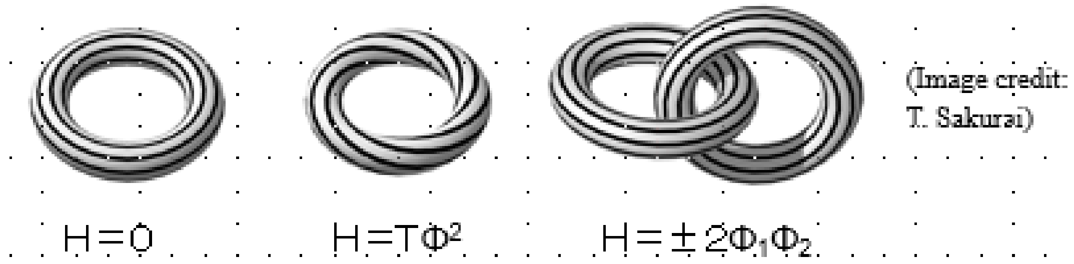
Phys. Rev., 115, 485, (1959)

Potenciais eletromagnéticos ϕ e $\vec{A}$ teriam "fisicalidade" na Mecânica Quântica"

Interpretação ainda contestada
L. Vaidman; Physical Review A 86, 040101(2012)
D Iencinella and G Matteucci; Eur. J. Phys. 25 249 (2004)

- Astrofísica e Física de Plasmas → Helicidade das linhas de força magnéticas

Medida do grau de torção e acoplamento entre linhas de força $H = \int \vec{A} \cdot \vec{B} dV$
(A. Zangwill; Modern Electrodynamics)



Consequences of helicity accumulation

Formation of Flux Ropes in the Corona

Taylor relaxation (1972): Turbulent reconnections take place to relax the field to Woltjer minimum-energy state under helicity conservation.

As a result of Taylor relaxation, magnetic flux ropes will form in the corona, as long as enough total magnetic helicity has been transported into the corona.

(Zhang & Low 2003, ApJ, 584, 479)