AVERSÃO AO RISCO E ALOCAÇÃO DE CAPITAL EM ATIVOS DE RISCO

Profa. Maria Paula Vieira Cicogna

Bodie et. al. (2014), cap. 6

Escolha do Carteira (Portfolio)

Escolha do da carteira de investimentos pode ser vista como a seguinte sequência:

(i) Escolha da composição da carteira entre ativos de risco (ações, títulos);

(ii) Decisão do percentual a ser investido em uma carteira com risco em relação ao ativo livre de risco (como títulos do governo de curto prazo)

Para tomar a decisão (ii), o investidor deve saber qual o retorno esperado dos ativos e o nível de risco: relação risco-retorno do portfolio

A composição da carteira de ativos de risco é complexa e depende de técnicas de otimização e do conhecimento do mercado por parte do profissional (trader) para compor a carteira;

A decisão do quanto alocar de recursos no ativo livre de risco e na carteira de ativos com risco depende da aversão ao risco do investidor e não pode ser delegada!

Risco, Especulação e Loteria (jogo)

Especulação

Especulação é assumir um "risco considerável" em um investimento para obter um "ganho proporcional"

"Risco considerável": risco suficiente para afetar a decisão de investimento.

"Ganho proporcional": prêmio de risco positivo, ou seja, um ganho esperado maior do que a alternativa livre de risco.

Um indivíduo pode rejeitar um investimento que tem um prêmio de risco positivo porque o ganho é insuficiente para que ele assuma o risco envolvido

Loteria

Loteria é apostar em um resultado incerto (não há ganho proporcional, ou seja, não há risco-retorno).

Uma loteria é assumir risco com o único propósito do risco em si.

Para que uma loteria se torne uma especulação, um prêmio de risco adequado deve ser dado ao investidor avesso ao risco para compensá-lo por assumir risco

exemplo

Aversão ao risco e especulação não são inconsistentes!

Um investimento de risco com um prêmio de risco nulo, chamado de jogo justo (fair game), é uma loteria

Aversão ao Risco e Utilidade

Aversão ao Risco

Indivíduos avessos ao risco rejeitam carteiras que tem prêmio de risco nulo (jogo justo) ou pior.

Investidores avessos ao risco estão dispostos a considerar apenas o ativo livre de risco ou especulações com prêmios de risco positivos

Indivíduo avesso ao risco penaliza o retorno esperado de um portfolio de risco de acordo com sua aversão ao risco ⇨ Quanto maior o risco, maior a penalidade!

Considere que que você deve escolher entre 3 carteiras, cujos retornos esperados, prêmio de risco e risco (desvio-padrão) são dados a seguir:

Portfolio	Risk Premium	Expected Return	Risk (SD)
L (low risk)	2%	7%	5%
M (medium risk)	4	9	10
H (high risk)	8	13	20

O retorno do ativo livre de risco é de 5%.

Qual portfolio você prefere?

Aversão ao Risco e Utilidade

Como investidores escolhem quantificam a taxa exigida para a qual estão dispostos a escolher a relação risco-retorno?

Cada investidor pode atribuir seu bem-estar em relação aos investimentos nas diferentes carteiras por meio de uma função utilidade. Seja o retorno esperado E(r) e a variância dos retornos σ^2, a função utilidade do investidor pode ser escrita como:

$$U = E(r) - \tfrac{1}{2} A\sigma^2$$

Valores maiores de utilidade são atribuídos a relações risco-retorno mais atrativas

Em que: A = índice de aversão ao risco do investidor
O fator ½ é uma convenção de escala

Avaliação de Investimentos pela utilidade

Três investidores estão avaliando os portfolios da tabela ao lado. Seus graus de aversão ao risco são: A1 = 2, A2 = 3,5 e A3 = 5.

Taxa livre de risco = 5%

Portfolio	Risk Premium	Expected Return	Risk (SD)
L (low risk)	2%	7%	5%
M (medium risk)	4	9	10
H (high risk)	8	13	20

Aversão ao Risco e Utilidade

As utilidades atribuídas a cada portfolio pelos investidores são:

Investor Risk Aversion (A)	Utility Score of Portfolio L [$E(r) = .07; \sigma = .05$]	Utility Score of Portfolio M [$E(r) = .09; \sigma = .10$]	Utility Score of Portfolio H [$E(r) = .13; \sigma = .20$]
2.0	$.07 - ½ \times 2 \times .05^2 = .0675$	$.09 - ½ \times 2 \times .1^2 = .0800$	$\mathbf{.13 - ½ \times 2 \times .2^2 = .09}$
3.5	$.07 - ½ \times 3.5 \times .05^2 = .0656$	$\mathbf{.09 - ½ \times 3.5 \times .1^2 = .0725}$	$.13 - ½ \times 3.5 \times .2^2 = .06$
5.0	$.07 - ½ \times 5 \times .05^2 = .0638$	$\mathbf{.09 - ½ \times 5 \times .1^2 = .0650}$	$.13 - ½ \times 5 \times .2^2 = .03$

As utilidade do ativo livre de risco é U_{RF} = 0,05

- A utilidade de quase todas as carteiras de risco é maior do que a utilidade do ativo livre de risco
- O investidor com menor aversão ao risco (A1 = 2) escolhe a carteira de maior risco (H)
- Nenhum investidor escolhe a carteira de menor risco (L)

O valor da utilidade dos porfolios de risco pode ser interpretado como a taxa de retorno do equivalente certeza ⇨ equivalente certeza = taxa que os portfolios de risco precisam oferecer com certeza para que o investidor prefira a carteira com risco ao investimento livre de risco (no mínimo, a mesma utilidade)

Um portfolio é desejável apenas se sua taxa de equivalente certeza

exceder o retorno do ativo livre de risco

Um indivíduo muito avesso ao risco pode associar para qualquer carteira de risco (mesmo com prêmio de risco positivo) uma taxa de equivalente certeza que seja que seja menor do que o retorno do ativo livre de risco ⇨ rejeita todas as carteiras com risco

Aversão ao Risco e Utilidade

Exercício

Considere que o portfolio de risco tenha retorno esperado de 20%, com um desvio-padrão de 30%. O ativo livre de risco tem retorno esperado de 7%. Se o índice de aversão ao risco do investidor for igual a 4, ele prefere o portfolio de risco ou o ativo livre de risco? E se o índice de aversão ao risco for igual a 2? Por quê?

Para que o investidor fosse indiferente entre o ativo livre de risco e a carteira com risco, em quanto deveria ser recompensado no seu equivalente certeza para que fosse indiferente nos dois casos?

Aversão ao Risco e Utilidade

Indivíduos Neutros ao Risco e Amantes do Risco

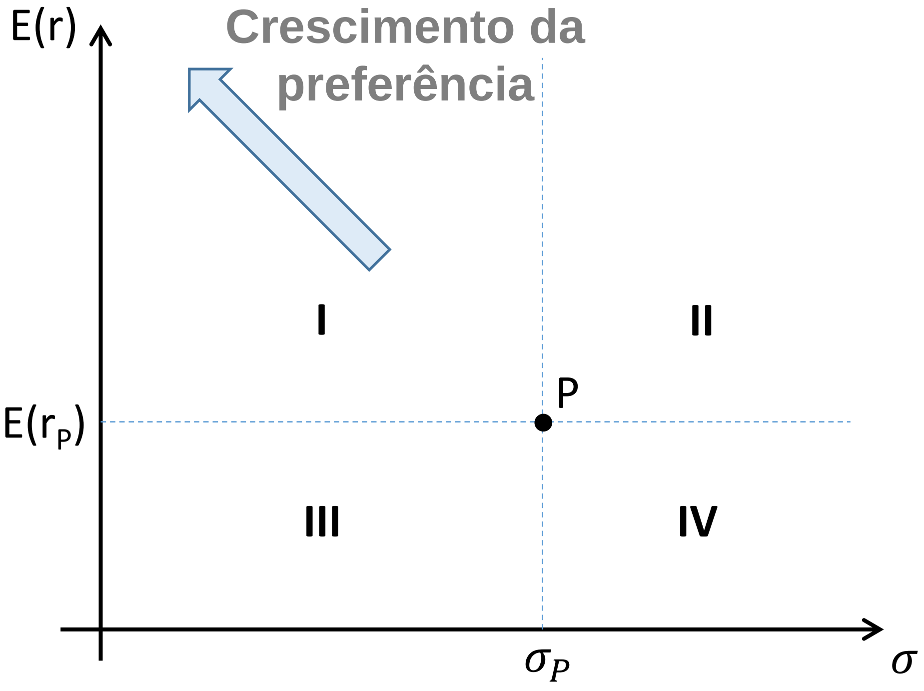
- ✓ **Neutro ao Risco (A = 0):** um indivíduo é neutro ao risco se sua preferência entre os ativos depender apenas do retorno esperado. Nesse caso, o risco é irrelevante, não havendo penalidade pelo risco (o equivalente certeza é simplesmente dado pelo retorno esperado)

- ✓ **Amante do Risco (A < 0):** o indivíduo amante do risco sempre prefere as loterias e os jugos justos, ajustando positivamente o retorno esperado pelo risco da carteira. Os amantes do risco preferem os jogos justos porque ajustam a utilidade por um fator positivo para o risco, aumentando o equivalente certeza acima do ativo livre de risco

Aversão ao Risco e Utilidade

Média-Variância

Indivíduos avessos ao risco sempre preferem mais retorno e menos risco



- Portfolio com risco P é preferível a qualquer portfolio da região IV
- Qualquer portfolio da região I é preferível a P

Critério da Média-Variância:

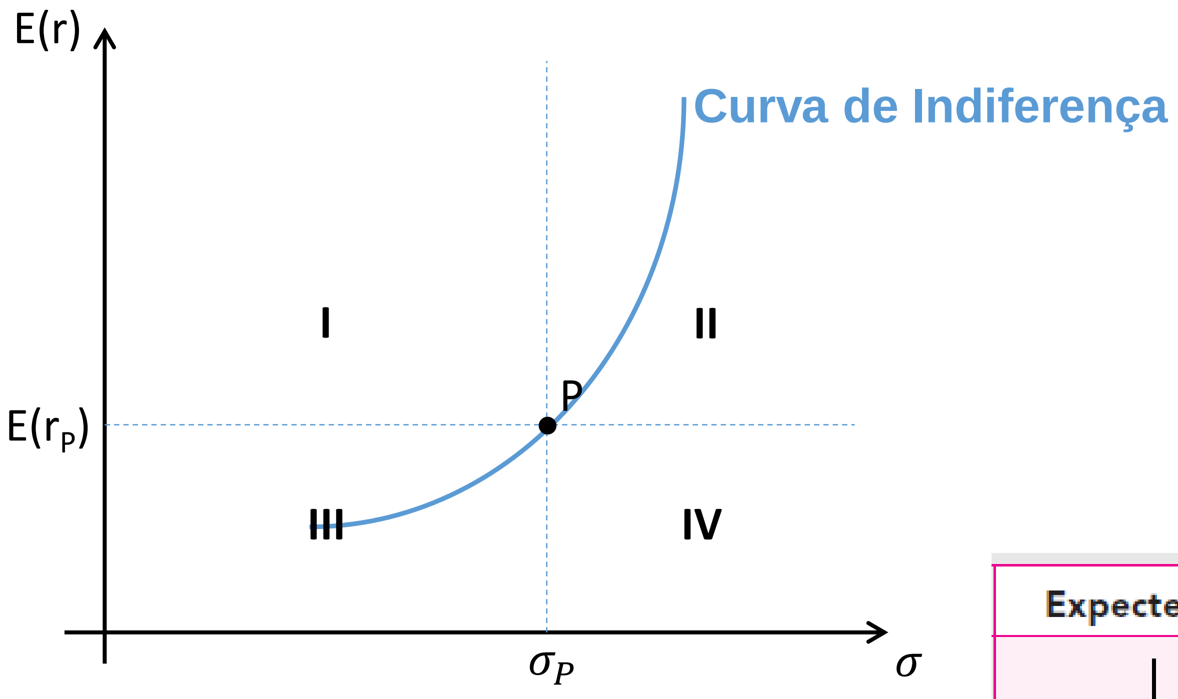
Portfolio A domina o portfolio B se

$$E(r_A) \geq E(r_B) \text{ e } \sigma_A \leq \sigma_B$$

E pelo menos uma das desigualdades é estrita

Aversão ao Risco e Utilidade

Média-Variância



Os portfolios das áreas II e III são indiferentes ao investidor:

- Área II: portfolios com mais risco e mais retorno
- Área III: portfolios com menos risco e menos retorno

O formato exato da curva que conecta os portfolios das áreas II e III com o portfolio P depende da preferência de risco do investidor

Exemplo: os portfolios indiferentes para um indivíduo com A = 4 são:

Expected Return, $E(r)$	Standard Deviation, σ	Utility = $E(r) - ½ A\sigma^2$
.10	.200	.10 − .5 × 4 × .04 = .02
.15	.255	.15 − .5 × 4 × .065 = .02
.20	.300	.20 − .5 × 4 × .09 = .02
.25	.339	.25 − .5 × 4 × .115 = .02

Aversão ao Risco e Utilidade

Exercício

Como seria a curva de indiferença de um indivíduo menos avesso ao risco comparado com a curva azul do slide anterior?

Desenhe as duas curvas no mesmo gráfico, ambas passando pelo ponto P.

Qual a sua Tolerância ao Risco? (*Suitability*)

Estimar a tolerância ao risco do investidor não é simples

- Quanto de risco você pode se expor? Quanto de risco você suporta?
- Quanto da sua renda você está disposto a perder no curto prazo? E no médio / longo prazo?

Vamos fazer o teste! Marque a alternativa que corresponde à sua resposta:

1. Apenas dois meses depois que você colocou dinheiro em um investimento, o preço caiu 20%. Considerando que os fundamentos do investimento não se alteraram, o que você faz?

a) Vende para evitar preocupações futuras e tenta outro investimento.
b) Não faz nada e espera o valor do investimento subir.
c) Compra mais. Era um bom investimento antes, agora está mais barato.

2. Considere a questão anterior. Seu investimento caiu 20%, mas é parte de um portfolio cuja meta de retorno ocorrerá em três diferentes horizontes de tempo.

2A. Se o horizonte de tempo fosse de 5 anos?

a) Vende.
b) Não faz nada.
c) Compra mais.

2B. Se o horizonte de tempo fosse de 15 anos?

a) Vende.
b) Não faz nada.
c) Compra mais.

2C. Se o horizonte de tempo fosse de 30 anos?

a) Vende.
b) Não faz nada.
c) Compra mais.

Qual a sua Tolerância ao Risco? (*Suitability*)

3. Seu plano de aposentaria rendeu 25% um mês depois que você comprou. Considere que os fundamentos da economia não se alteraram. O que você faz?

a) Vende e realiza o ganho.
b) Permanece no plano e espera por mais ganhos.
c) Compra mais, pois o retorno pode ser ainda maior.

4. Você está investindo para a aposentadoria que acontecerá daqui a 15 anos. O que você prefere fazer?

a) Investir em um fundo de investimentos de curto prazo, abrindo mão de maiores ganhos, mas com menos risco.
b) Investir em um mix de 50-50 entre fundos de títulos e fundos de ações, esperando ter maior retorno, ao mesmo tempo que você se sente mais seguro de ter uma renda em parte mais estável.
c) Investir em fundos de investimentos de crescimento agressivo, cujo valor vai provavelmente flutuar durante o ano, mas com potencial de ganhos expressivos nos próximos 5 ou 10 anos.

5. Você foi premiado!! O que você escolhe:

a) R$ 2.000 em dinheiro
b) 50% de chance de ganhar R$5.000
c) 20% de chance de ganhar R$15.000

6. Uma ótima oportunidade de investimento apareceu, mas você precisa tomar dinheiro emprestado para aproveitá-la. Você faz o empréstimo?

a) Definitivamente não.
b) Talvez.
c) Sim.

Qual a sua Tolerância ao Risco? (*Suitability*)

7. A empresa em que você trabalha está vendendo ações para os empregados. Em três anos, a gestão da empresa planeja abrir o capital da empresa. Até lá, você não poderá vender suas ações e você não receberá dividendos. Entretanto, seu investimento pode se multiplicar 10 vezes se a empresa, de fato, abrir o capital. Quanto dinheiro você investe?

a) Nenhum.

b) Dois meses de salário.

c) Quatro meses de salário.

Cálculo da sua tolerância ao risco:

Some o número de respostas que você marcou as letras a, b, c e multiplique-as da seguinte forma:

Respostas (a) _________ x 1 = ________ pontos

Respostas (b) _________ x 2 = ________ pontos

Respostas (c) _________ x 3 = ________ pontos

Sua pontuação = _________ pontos

Você pode ser:

9 – 14 pontos: Conservador

15 – 21 pontos: Moderado

22 – 27 pontos: Agressivo

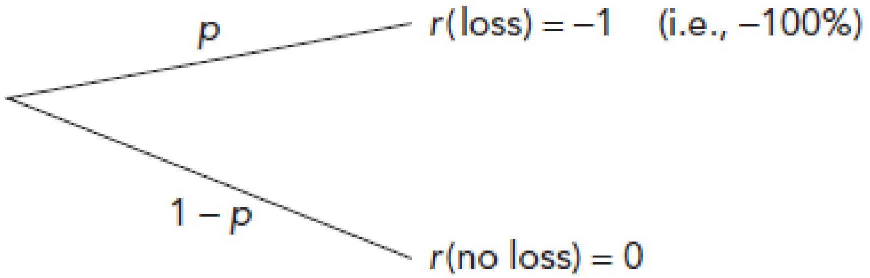
Estimativa da Aversão ao Risco

Uma forma objetiva de calcular a aversão ao risco de um investidor é estimar quanto ele está disposto a pagar para evitar o risco

Considere um investidor com aversão ao risco A

Seja *p* a probabilidade de perder 100% de sua riqueza ⇨ r(loss) = -100%. Caso a perda não ocorra, o investidor continua com a mesma riqueza ⇨ r(no loss) = 0

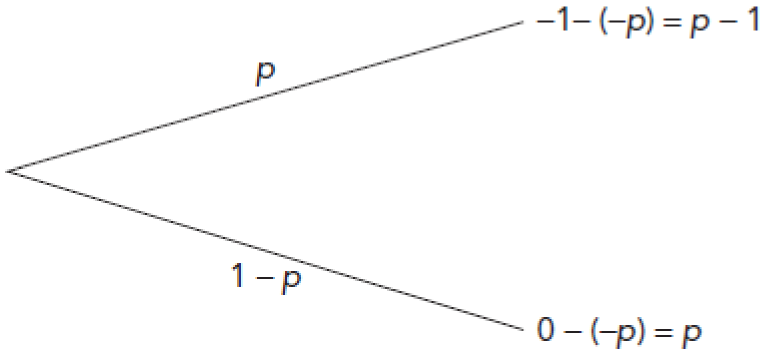
A distribuição de probabilidade da taxa de retorno esperado do investidor é:



A taxa de retorno esperado é, portanto:

$$E(r) = p.(-1) + (1 - p).0 = -p$$

O desvio-padrão *(r-E(r))* para cada resultado é:



Estimativa da Aversão ao Risco

A variância da taxa de retorno é, portanto: $\sigma^2(r) = p.(p-1)^2 + (1-p).p^2 = p.(1-p)$

Considerando esses valores, podemos calcular a utilidade do investidor como:

$$U = -p - {}^1\!/_2 . A. p(1-p)$$

Suponha que uma seguradora cobre *$v* pelo seguro total da riqueza do investidor. Nesse caso, a utilidade do indivíduo que pagou o valor do seguro é, com certeza, *U* = *-v*

O valor que torna o indivíduo indiferente entre fazer ou não o seguro é, portanto:

$$U = -p - {}^1\!/_2 . A. p(1-p) = -v \Rightarrow v = p.\underbrace{[1 + {}^1\!/_2 . A. p(1-p)]}_{\text{Múltiplo da perda esperada } (p) \text{ que o investidor está disposto a pagar: depende do valor de A}}$$

Estimativa da Aversão ao Risco

Múltiplo da perda esperada (p) para diferentes valores de A:

Investor Risk Aversion, *A*	Expected Rate of Loss, $p = .0001$ Maximum Premium, *v*, as a Multiple of Expected Loss, *p*	Expected Rate of Loss, $p = .01$ Maximum Premium, *v*, as a Multiple of Expected Loss, *p*
0	1.0000	1.0000
1	1.5000	1.4950
2	1.9999	1.9900
3	2.4999	2.4850
4	2.9998	2.9800
5	3.4998	3.4750

Baseados na disposição a pagar por seguros contra perdas catastróficas, economistas estimam que os graus de aversão ao risco variam entre 2 e 4

Alocação do Capital entre Carteiras Com e Sem Risco

Escolha da alocação de ativos: escolha entre classes de investimentos, ao invés de investimentos em ativos específicos

Vamos começar com a alocação de ativos mais básica possível: ativo livre de risco X carteira de risco

- P = carteira de ativos de risco: ocupa proporção *y* da carteira total
- F = ativo livre de risco : ocupa proporção (*1 – y*) da carteira total

A proporção de ativos de risco dentro da carteira com risco não se altera, mesmo se houver realocação entre o ativo livre de risco e a carteira com risco ⇨ quando há realocação entre a carteira com risco e a carteira livre de risco, a distribuição de probabilidade da taxa de retorno do mix de ativos com risco / sem risco se altera

O indivíduo escolhe a alocação ótima entre a carteira com risco e o ativo livre de risco pela melhor combinação risco-retorno dentre os conjuntos disponíveis factíveis

Alocação do Capital entre Carteiras Com e Sem Risco

Seja:

Taxa de retorno da carteira com risco dada por r_P, sua taxa de retorno esperado $\mathrm{E}(r_P)$ e desvio-padrão σ_P

Taxa de retorno do ativo livre de risco dada por r_f

Proporção y é investida na carteira com risco e (1 – y) é investida no ativo livre de risco, de forma que o retorno da carteira total do investidor (C) é:

$$r_C = y.r_P + (1 - y).r_f$$

O valor esperado da taxa de retorno desse portfolio é:

$$E(r_C) = y.E(r_P) + (1 - y).r_f$$

$$E(r_C) = r_f + y.\underbrace{\left[E(r_P) - r_f\right]}_{\text{Prêmio de Risco}}$$

O desvio-padrão do portfolio total é:

$$\sigma_C = y.\sigma_P$$

Investidores são considerados avessos ao risco e, portanto, não assumem posição na carteira com risco sem um prêmio de risco positivo

Alocação do Capital entre Carteiras Com e Sem Risco

Exemplo:

Taxa esperada de retorno da carteira com risco:
$\mathrm{E}(r_P) = 15\%$ e desvio-padrão $\sigma_P = 22\%$

Taxa de retorno do ativo livre de risco dada por $r_f = 7\%$

O valor esperado da taxa de retorno desse portfolio é: $E(r_C) = 0{,}07 + y.[0{,}15 - 0{,}07]$

O desvio-padrão do portfolio total é: $\sigma_C = 0{,}22.y$

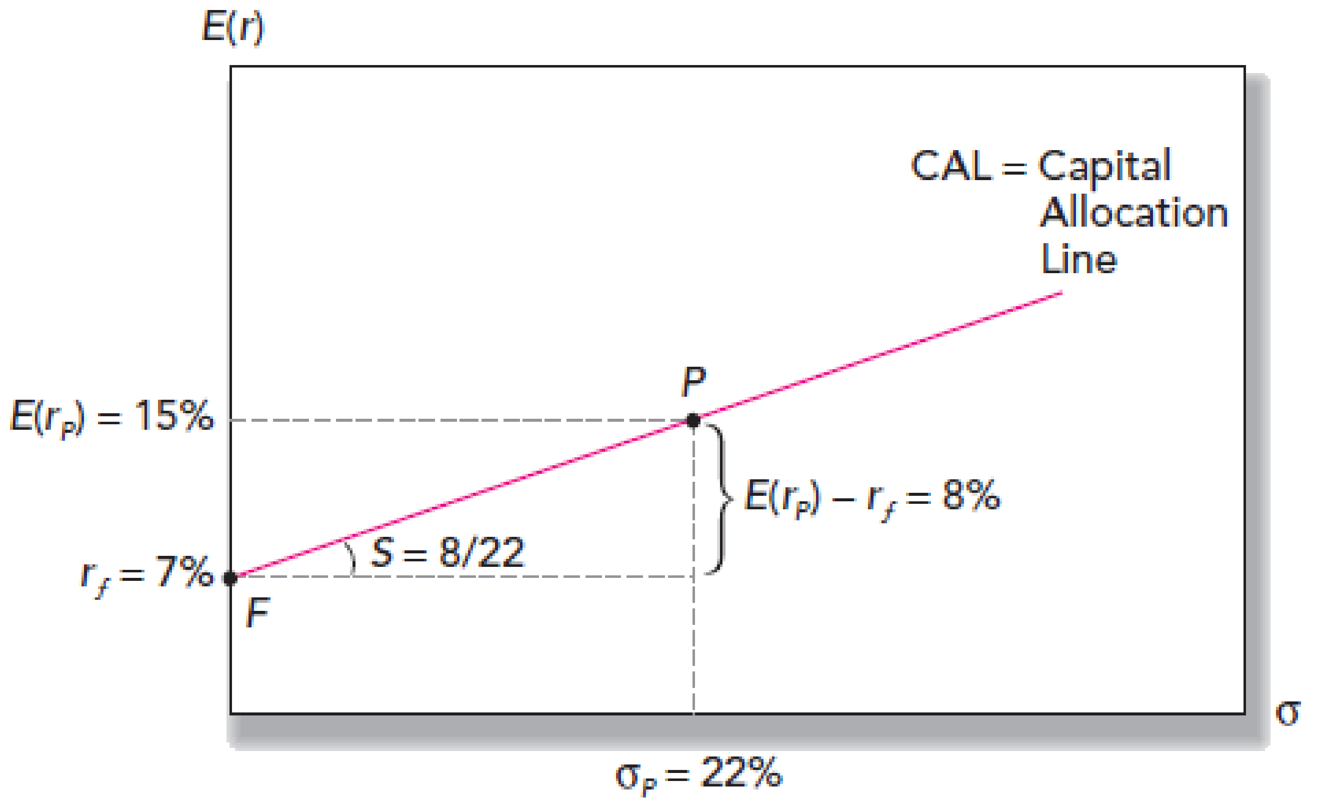
CAL = linha de alocação de capital:

Mostra todas as combinações possíveis entre a alocação no ativo livre de risco F e a carteira com risco P

Inclinação da CAL é: $\dfrac{E(r_P)-r_f}{\sigma_P}$

(retorno adicional por cada unidade de risco adicional)

⇨ Aumentar a fração investida na carteira com risco aumenta o retorno esperado de forma proporcional ao prêmio de risco (8% no exemplo), assim como aumenta o risco da carteira proporcional ao desvio-padrão da carteira com risco (22% no exemplo)



Alocação do Capital entre Carteiras Com e Sem Risco

Sendo: $\sigma_C = y.\sigma_P$ ⇨ $y = {}^{\sigma_C}/_{\sigma_P}$, então, substituindo na equação do retorno esperado:

$$E(r_C) = r_f + {}^{\sigma_C}/_{\sigma_P}.\left[E(r_P) - r_f\right]$$

$$E(r_C) = r_f + \frac{\left[E(r_P) - r_f\right]}{\sigma_P}.\sigma_C$$

A linha de alocação do capital (CAL) é uma reta com intercepto r_f e inclinação $S = {}^{[E(r_P)-r_f]}/_{\sigma_P}$

S mostra o retorno incremental por unidade de risco

⇨ taxa de recompensa por volatilidade ou Índice de Sharpe

No exemplo: $E(r_C) = 0{,}07 + {}^{8}/_{22}.\sigma_C$

Se y = 0,5: $E(r_C) = 0{,}07 + 0{,}5.[0{,}08] = 0{,}11\ ou\ 11\%$ e $\sigma_C = 0{,}5.0{,}22 = 0{,}11\ ou\ 11\%$

Taxa de recompensa por volatilidade = 4/11 = 0,36

Alocação do Capital entre Carteiras Com e Sem Risco

Posição alavancada: **carteiras à direita de P são acessíveis apenas se o investidor puder tomar emprestado no mercado financeiro e investir mais de 100% de seu capital**

Suponha que o investidor tenha $300.000 para investir, mas decide tomar emprestado $120.000 pela taxa livre risco de 7%. O investidor aloca todo seu recurso na carteira com risco, formando uma posição alavancada.

Calcule o percentual investido na carteira com risco e no ativo livre de risco, o retorno esperado da carteira total e sua volatilidade. A taxa de recompensa por volatilidade é a mesma da posição alavancada?

Explique as diferenças encontradas nos números em relação à posição não alavancada.

Alocação do Capital entre Carteiras Com e Sem Risco

Posição alavancada: **muito dificilmente o investidor consegue tomar emprestado à taxa livre de risco. Em geral, a taxa cobrada nos empréstimos também inclui um prêmio de risco de crédito**

Suponha que o investidor tomou o empréstimo à taxa ${r^B}_f = 9\%$. Qual a taxa de recompensa por volatilidade à nova taxa? Como fica a CAL considerando as taxas diferentes?

Alocação do Capital entre Carteiras Com e Sem Risco

Posição alavancada: muito dificilmente o investidor consegue tomar emprestado à taxa livre de risco. Em geral, a taxa cobrada nos empréstimos também inclui um prêmio de risco de crédito

Suponha que o investidor tomou o empréstimo à taxa $r^B{}_f = 9\%$. Qual a taxa de recompensa por volatilidade à nova taxa? Como fica a CAL considerando as taxas diferentes?

A inclinação da CAL à direita de P será:

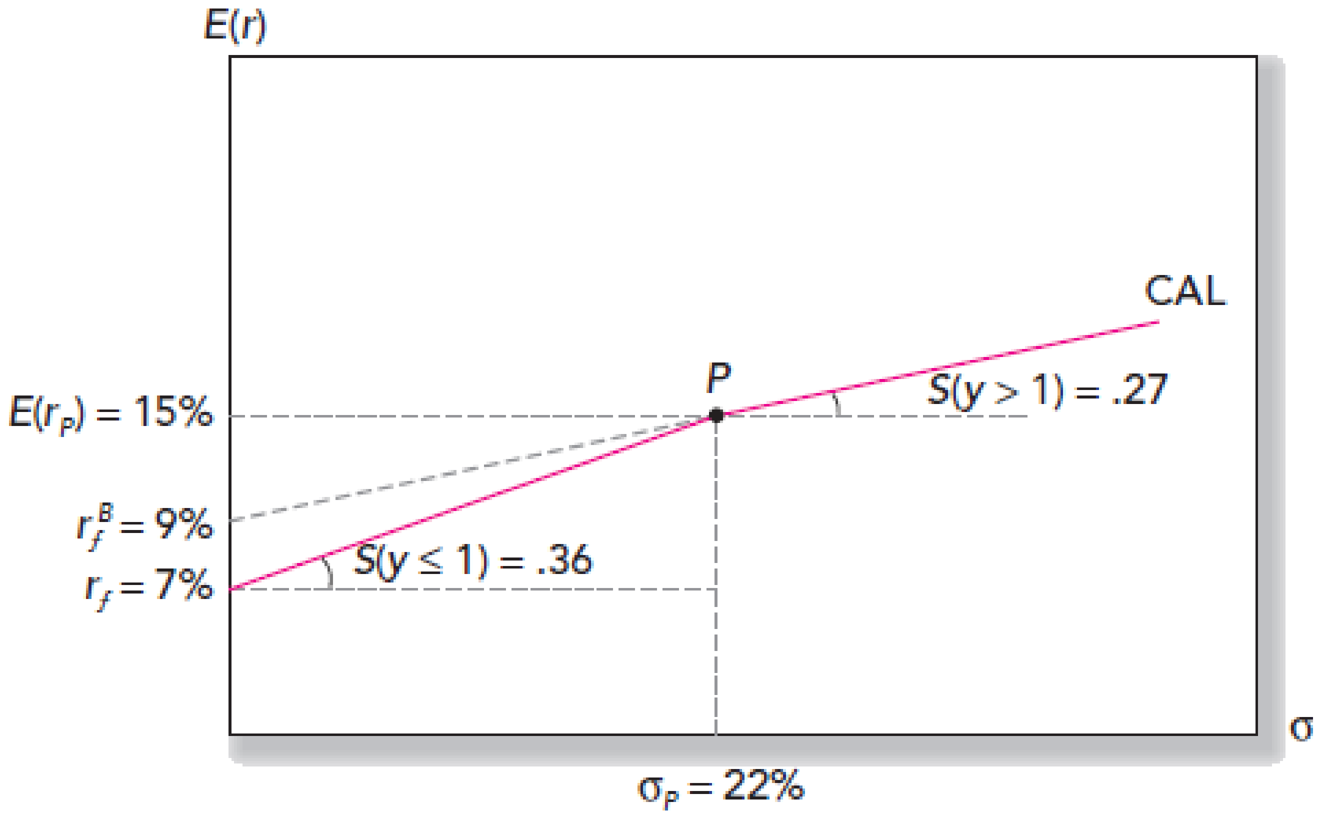
$$S = \left[E(r_C) - r^B{}_f\right] / \sigma_C$$

$$E(r_C) = 0{,}09 + 1{,}4.(0{,}15 - 0{,}09) = 0{,}174$$

$$S = [0{,}174 - 0{,}09] / 0{,}308 = 0{,}084 / 0{,}308 = 0{,}27$$

A inclinação da CAL à esquerda de P continua sendo 0,36

⇨ CAL tem uma redução de inclinação com a nova taxa: recompensa por volatilidade diminui com taxa de juros mais elevada



Alocação do Capital entre Carteiras Com e Sem Risco

Mudança na taxa de retorno da carteira com risco

Suponha que houve um aumento na taxa de retorno esperada da carteira com risco de 15% para 17%. Se todos os demais parâmetros continuarem constantes, qual a inclinação da CAL para $y \leq 1$ e para $y > 1$?

Tolerância ao Risco e Alocação de Ativos

Diferenças na aversão ao risco do investidor implicam que, dado um conjunto idêntico de alocação de ativos entre a carteira com risco e o ativo livre de risco (CAL), investidores diferentes escolhem posições diferentes na carteira com risco

Quanto mais avesso ao risco for o investidor, menor sua alocação na carteira com risco

Sendo o retorno esperado do portfolio dado por $E(r_C) = r_f + y.\left[E(r_P) - r_f\right]$ e sua variância ${\sigma_C}^2 = y^2.{\sigma_P}^2$, o investidor sempre busca maximizar sua utilidade dada pela função:

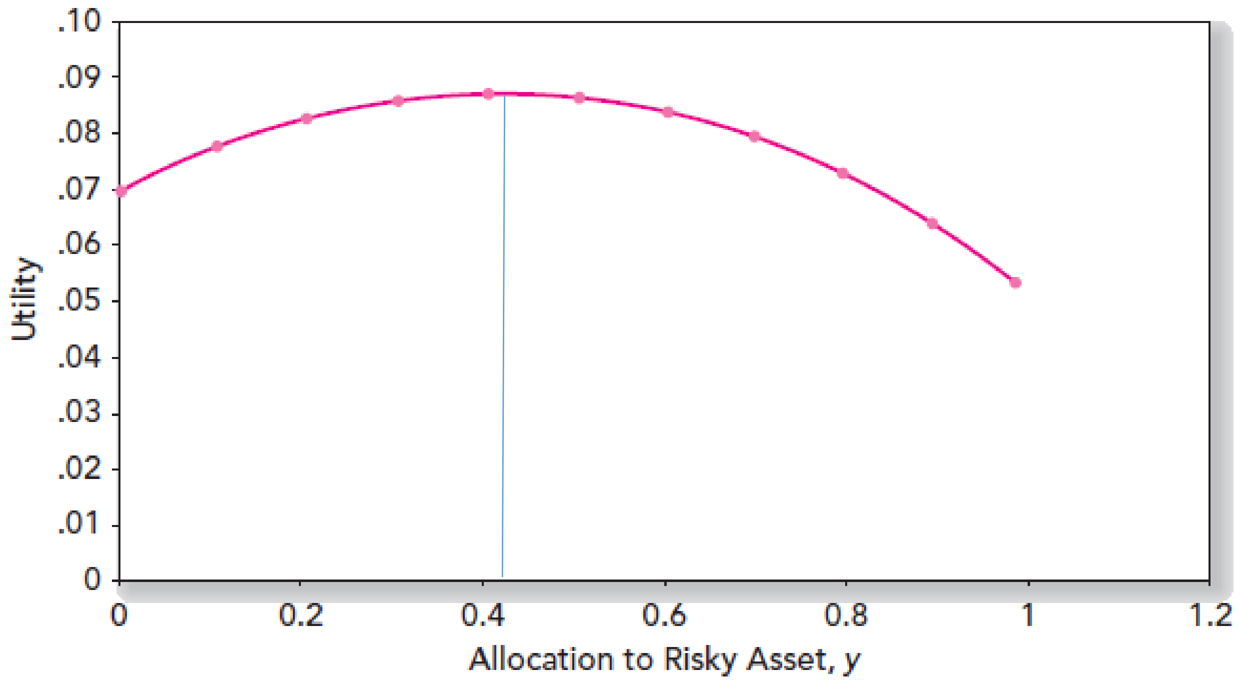
$$U = E(r) - \tfrac{1}{2}A\sigma^2$$

Conforme a alocação na carteira com risco aumenta, o retorno esperado do portfolio aumenta ⇨ a utilidade pode aumentar ou diminuir

Tolerância ao Risco e Alocação de Ativos

Para uma aversão ao risco igual a 4 (A = 4), as diferentes alocações no ativo com risco levam às seguintes utilidades:

(1) y	(2) $E(r_C)$	(3) σ_C	(4) $U = E(r) - \frac{1}{2}A\sigma^2$
0	.070	0	.0700
0.1	.078	.022	.0770
0.2	.086	.044	.0821
0.3	.094	.066	.0853
0.4	.102	.088	.0865
0.5	.110	.110	.0858
0.6	.118	.132	.0832
0.7	.126	.154	.0786
0.8	.134	.176	.0720
0.9	.142	.198	.0636
1.0	.150	.220	.0532



Tolerância ao Risco e Alocação de Ativos

O problema da maximização da utilidade pode ser escrito como:

$$\underset{y}{\text{Max}}\ U = E(r_C) - \tfrac{1}{2}A\sigma_C^2 = r_f + y[E(r_P) - r_f] - \tfrac{1}{2}Ay^2\sigma_P^2$$

O ponto ótimo é encontrado pela Condição de Primeira Ordem: U’(y) = 0

$$y^* = \frac{E(r_P) - r_f}{A\sigma_P^2}$$

A alocação ótima na carteira com risco é inversamente proporcional ao nível de risco (variância) e ao nível de aversão ao risco (A) e diretamente proporcional ao prêmio de risco

Tolerância ao Risco e Alocação de Ativos

Exemplo: para o investidor com A = 4, retorno esperado da carteira com risco igual a 15% e volatilidade da carteira com risco igual a 22%, qual a alocação ótima na carteira com risco? Considere o retorno do ativo livre de risco igual a 7%.

Com a alocação ótima, qual o retorno e o risco do portfolio do investidor?

Tolerância ao Risco e Alocação de Ativos

Curva de Indiferença

As curvas de indiferença mostram as combinações de risco-retorno que deixam o investidor com o mesmo nível de utilidade

Considere a função utilidade dada por:

$$U = E(r) - \tfrac{1}{2} \times A \times \sigma^2$$

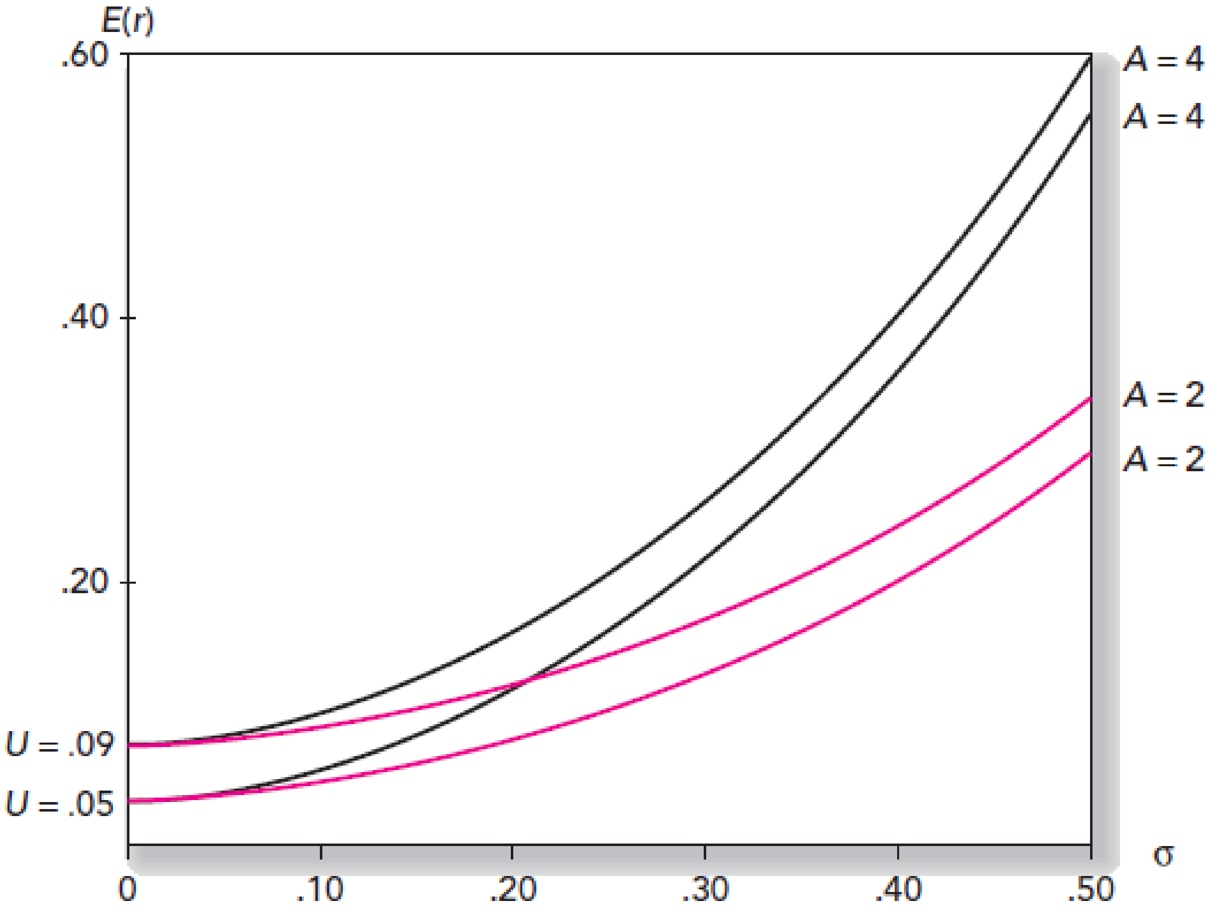
Os diferentes retornos que deixam o investidor com a mesma utilidade, dados diferentes níveis de risco estão na tabela ao lado (para diferentes níveis de aversão ao risco):

	A = 2		A = 4	
σ	U = .05	U = .09	U = .05	U = .09
0	.0500	.0900	.050	.090
.05	.0525	.0925	.055	.095
.10	.0600	.1000	.070	.110
.15	.0725	.1125	.095	.135
.20	.0900	.1300	.130	.170
.25	.1125	.1525	.175	.215
.30	.1400	.1800	.230	.270
.35	.1725	.2125	.295	.335
.40	.2100	.2500	.370	.410
.45	.2525	.2925	.455	.495
.50	.3000	.3400	.550	.590

Tolerância ao Risco e Alocação de Ativos

Curva de Indiferença

As curvas da tabela anterior estão no gráfico abaixo:



O investidor sempre prefere a curva de indiferença superior (maior utilidade):

- ✓ Para o mesmo nível de risco, a curva de indiferença mais acima está associada a um maior retorno esperado

Dada a escolha, qualquer investidor prefere o portfolio com maior equivalente certeza (utilidade)

Tolerância ao Risco e Alocação de Ativos

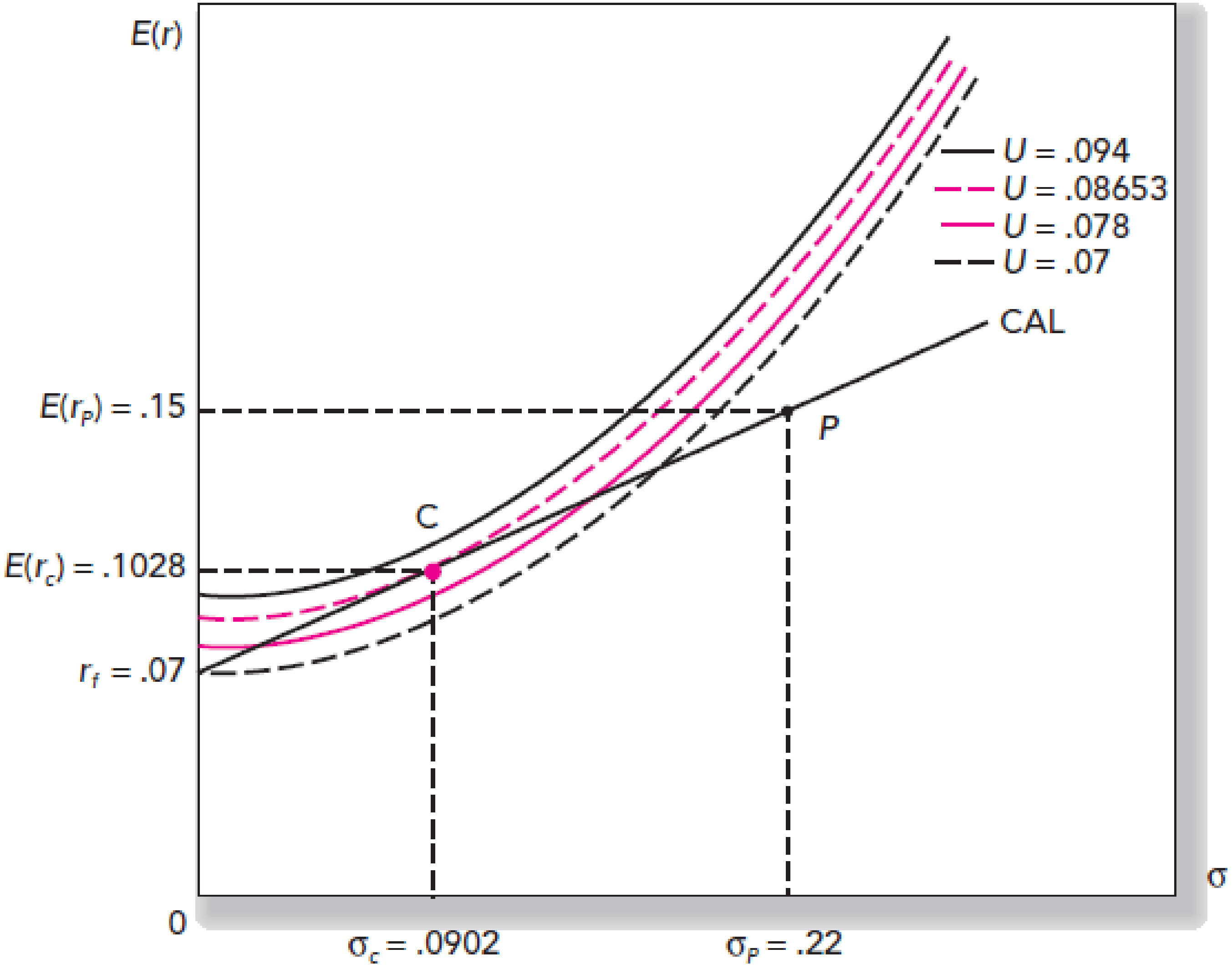
Curva de Indiferença e Portfolio Ótimo

Nem todas as curvas de indiferença estão acessíveis

A linha de alocação de capital (CAL) mostra as combinações possíveis entre o risco-retorno das diferentes carteiras ⇨ portfolio ótimo do investidor é aquele dado pela tangente entre a curva de indiferença mais alta e a linha de alocação de capital

Neste ponto: a curva de indiferença mais alta que está acessível ao investidor ⇨ desvio-padrão e o retorno esperado do portfolio ótimo completo

A = 4



Tolerância ao Risco e Alocação de Ativos

Curva de Indiferença e Portfolio Ótimo

Portanto, o problema de maximização da utilidade do investidor é formalmente descrito como:

$$\underset{y}{\text{Max}}\ U = E(r_C) - ½A\sigma_C^2$$

Sujeito a: $\boldsymbol{E(r_C) = r_f + y.\left[E(r_P) - r_f\right]}$

O que resulta no problema já descrito antes:

$$\underset{y}{\text{Max}}\ U = E(r_C) - ½A\sigma_C^2 = r_f + y[E(r_P) - r_f] - ½Ay^2\sigma_P^2$$

Que tem como Condição de Primeira Ordem: U’(y) = 0

$$y^* = \frac{E(r_P) - r_f}{A\sigma_P^2}$$

Tolerância ao Risco e Alocação de Ativos

Sendo o coeficiente de aversão ao risco do investidor igual a 3, retorno esperado da carteira com risco igual a 15% (com volatilidade igual a 22%) e retorno do ativo livre de risco igual a 7%.

Como o mix de alocação de ativos muda em relação ao investidor com A = 4? Quais os novos valores do retorno esperado do portfolio total e de seu risco?

Suponha que a taxa de empréstimo $\left(r^{B}{}_{f}\right)$ é igual a 9%. Mostre graficamente como a escolha de alguns investidores será afetada pela taxa de empréstimo maior do que a taxa livre de risco. Quais investidores não serão afetados pela taxa de empréstimo maior?