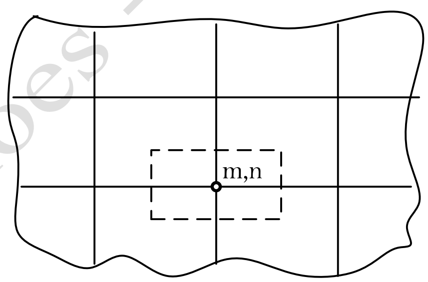
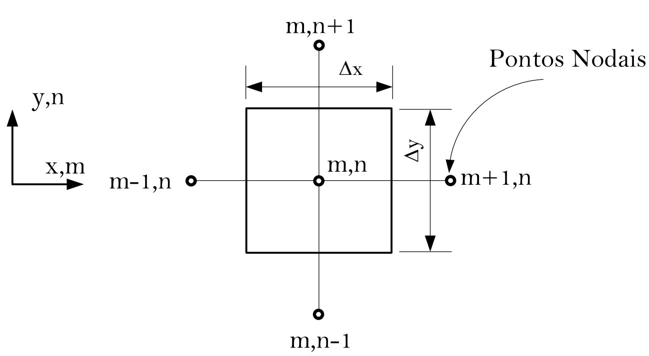
AULA 11 – SOLUÇÃO NUMÉRICA - DIFERENÇAS FINITAS

Como estudado na aula anterior, a solução da equação da condução de calor em configurações bi e tridimensional é bastante complexa e, verdadeiramente, na maioria dos casos práticos não existe nem solução analítica. Nesse caso, lança-se mão de métodos numéricos de solução. Há uma grande variedade de métodos disponíveis na literatura, mas vamos nos ater a apenas um dos métodos: o das *diferenças finitas*.

A idéia consiste em dividir a região que está sendo examinada em pontos discretos ou pontos nodais, e aplicar um balanço de energia para cada ponto nodal, conforme ilustrado no esquema abaixo. Assim, transforma-se o meio contínuo original em um meio discreto formado por uma matriz de pontos com propriedades térmicas que "concentram" as informações do meio contínuo original naqueles pontos. Considerando o esquema a seguir, considere o ponto nodal (m,n) indicado, tendo como vizinhos os pontos nodais (m-1,n) à esquerda, (m+1,n) à direita, (m,n-1) abaixo e (m,n+1) acima. A distância entre os pontos nodais é Δx e Δy, nas duas direções principais.





A equação da condução de calor em RP, 2-D é dada por $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$. Ela pode assim ser assim discretizada:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{(T_{m,n}-T_{m-1,n})}{\Delta x}$$ (Primeira derivada na direção *x* – face esquerda)

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{(T_{m+1,n}-T_{m,n})}{\Delta x}$$ (Primeira derivada na direção *x* – face direita)

Assim,

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right| \approx \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+\frac{1}{2},n}-\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x}$$ (Segunda derivada na direção *x* – centro)

Ou, ainda, após substituição das primeiras derivadas: $\boxed{\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{m,n} \approx \frac{T_{m-1,n}+T_{m+1,n}-2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}}$

Analogamente, na direção *y*: $\boxed{\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n-1}+T_{m,n+1}-2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}}$

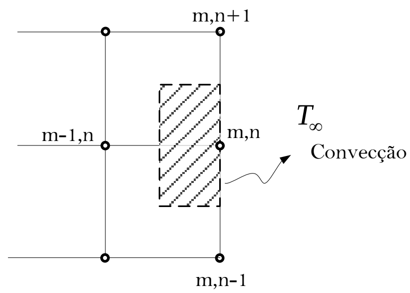
Assim, a equação original da condução de calor diferencial pode ser aproximada por uma equação algébrica,

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx T_{m-1,n}+T_{m+1,n}+T_{m,n-1}+T_{m,n+1}-4T_{m,n}=0, \quad \text{se } \Delta x=\Delta y}$$

A equação acima é a forma da equação do calor em diferenças finitas para o caso em RP, 2-D. Note que a temperatura nodal $T_{m,n}$ representa a média aritmética das quatro temperaturas da sua redondeza.

O que acontece nas regiões de contorno do problema?

Suponhamos que haja convecção, conforme ilustrado. Um nó (à direita) se situa sobre a superfície ou no contorno do meio.



Procede-se a um balanço de energia para o ponto (*m,n*) em questão

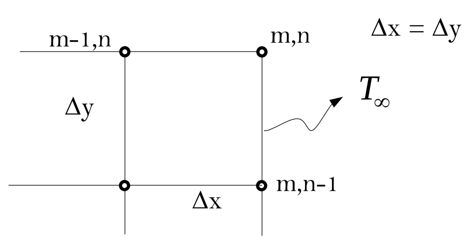
$$-k\Delta y\frac{(T_{m,n}-T_{m-1,n})}{\Delta x}-k\frac{\Delta x}{2}\frac{(T_{m,n}-T_{m,n-1})}{\Delta y}-k\frac{\Delta x}{2}\frac{(T_{m,n}-T_{m,n+1})}{\Delta y}=h\Delta y(T_{m,n}-T_\infty)$$

se $\Delta x = \Delta y$

$$\boxed{T_{m,n}\left(h\frac{\Delta x}{k}+2\right)-h\frac{\Delta x}{k}T_\infty-\frac{1}{2}(2T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1})=0}$$

Para outras condições de contorno, equações semelhantes podem ser escritas.

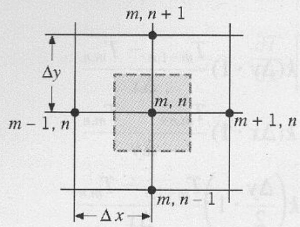
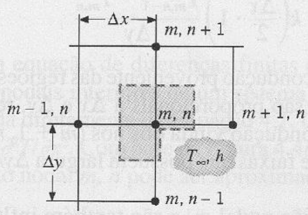
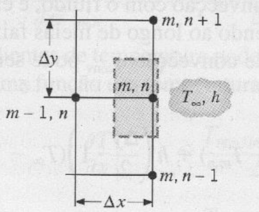
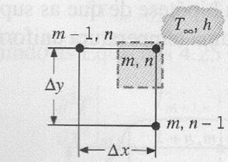
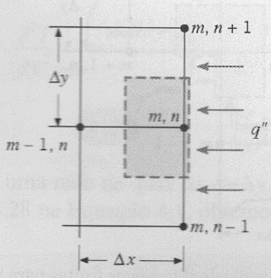
Por exemplo, um canto superior à direita:



$$\boxed{2T_{m,n}\left(h\frac{\Delta x}{k}+1\right)-2h\frac{\Delta x}{k}T_\infty-(T_{m-1,n}+T_{m,n-1})=0}$$

Ver tabela 4.2 (Incropera) ou Tabela 3.2 Holman para outras condições e geometrias.
Tabela 4.2 do Incropera.

TABELA 4.2 Resumo de equações de diferenças finitas para pontos nodais

Configuração	Equação de Diferenças Finitas $\Delta x = \Delta y$
	$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} = 0$ **Caso 1.** Ponto nodal interior
	$2(T_{m-1,n} + T_{m,n+1}) + (T_{m+1,n} + T_{m,n-1}) + 2\dfrac{h\,\Delta x}{k}T_\infty - 2\left(3 + \dfrac{h\,\Delta x}{k}\right)T_{m,n} = 0$ **Caso 2.** Ponto nodal em um vértice interno com convecção
	$(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + \dfrac{2h\,\Delta x}{k}T_\infty - 2\left(\dfrac{h\,\Delta x}{k} + 2\right)T_{m,n} = 0$ **Caso 3.** Ponto nodal em uma superfície plana com convecção
	$(T_{m,n-1} + T_{m-1,n}) + 2\dfrac{h\,\Delta x}{k}T_\infty - 2\left(\dfrac{h\,\Delta x}{k} + 1\right)T_{m,n} = 0$ **Caso 4.** Ponto nodal em um vértice externo com convecção
	$(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + \dfrac{2q''\,\Delta x}{k} - 4T_{m,n} = 0$ **Caso 5.** Ponto nodal em uma superfície plana com fluxo térmico uniforme

[a,b] Para obter a equação de diferenças finitas para uma superfície adiabática (ou superfície de simetria), simplesmente colque h ou q'' igual a zero.

Uma vez que as equações de todos os pontos nodais forem estabelecidas, obtém-se um sistema de N equações por N incógnitas do tipo:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{T}_2 + \ldots \boldsymbol{a}_{1N}\boldsymbol{T}_N = \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{T}_2 + \ldots \boldsymbol{a}_{2N}\boldsymbol{T}_N = \boldsymbol{c}_2 \\ . \qquad . \qquad . \qquad . \\ . \qquad . \qquad . \qquad . \\ . \qquad . \qquad . \qquad . \\ \boldsymbol{a}_{N1}\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{a}_{N2}\boldsymbol{T}_2 + \ldots \boldsymbol{a}_{NN}\boldsymbol{T}_N = \boldsymbol{c}_N \end{array}$$

Ou, em notação simplificada matricial, vem:

$$[A].[T] = [C]$$

Estudar exemplo resolvido 4.3 (Incropera)

Uma técnica antiga de solução manual de sistemas lineares de equações é o chamado método da relação. Nesta técnica, a equação nodal é, primeiramente, igualada a zero:

$$a_{m1}T_1 + a_{m2}T_2 + \ldots + a_{mn}T_n - c_n = 0$$

Em seguida é igualada a um resíduo e depois segue-se o seguinte procedimento de solução:

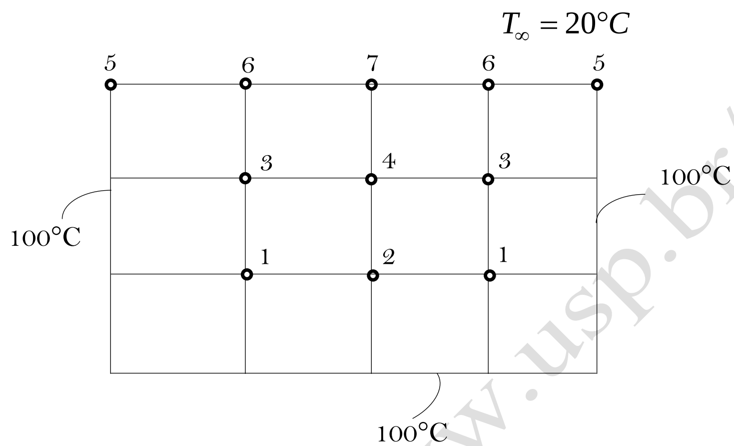
1 – Admite-se uma distribuição inicial de temperatura;
2 – O valor do resíduo em cada ponto nodal é calculado;
3 – "Relaxar" o maior resíduo encontrado para zero (ou próximo) mudando a temperatura do ponto nodal correspondente;
4 – Recalcular os resíduos para esta nova temperatura;
5 – Continuar o processo 3 – 4 até que todos os resíduos sejam nulos ou próximos de zero.

Hoje em dia, há muitos programas de computador e até de calculadoras que resolvem um sistema linear de equações por diversas técnicas. Basta selecionar um deles. Por exemplo, o método de eliminação gaussiana.

Exemplo Resolvido

Uma placa retangular é submetida às condições de contorno ilustradas na figura. Pede-se calcular a distribuição de temperatura nos pontos nodais mostrados, dados que:

$h = 200\ W/m^2\ ºC$
$T_\infty = 20\ ºC$
$k = 10\ W/m\ ºC$
$\Delta x = \Delta y = 10\ cm$



OBS: Observar a simetria do problema (nós com o mesmo número)

Solução:

Pontos nodais interiores (1-4) - vale a seguinte equação:

$$\boldsymbol{T_{M-1,N}} + \boldsymbol{T_{M+1,N}} + \boldsymbol{T_{M,N-1}} + \boldsymbol{T_{M,N+1}} - 4\boldsymbol{T_{M,N}} = 0$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&nó\ 1: \quad -4T_1 + T_2 + T_3 + 2(100) = 0\\
&nó\ 2: \quad 2T_1 - 4T_2 + T_4 + 100 = 0\\
&nó\ 3: \quad T_1 - 4T_3 + T_4 + T_6 + 100 = 0\\
&nó\ 4: \quad T_2 + 2T_3 - 4T_4 + T_7 = 0
\end{aligned}
$$

Ponto nodal 5 (canto) – vale a seguinte equação

$$\boldsymbol{T_{m,n}}\left(\boldsymbol{h}\frac{\boldsymbol{\Delta x}}{\boldsymbol{k}} + 2\right) - \boldsymbol{h}\frac{\boldsymbol{\Delta x}}{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{T_\infty} - (\boldsymbol{T_{m+1,n}} + \boldsymbol{T_{fixo}}) = 0$$

nó 5: $\boldsymbol{T}_5\left(\frac{200\times 0{,}1}{10} + 2\right) - \frac{200\times 0{,}1}{10}20 - (\boldsymbol{T}_6 + 100) = 0$, ou

$$-4T_5 + T_6 + 140 = 0$$

Pontos nodais com convecção (6 – 7) – vale a seguinte equação:

$$\boldsymbol{T}_{m,n}\left(\boldsymbol{h}\frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{k}} + 2\right) - \boldsymbol{h}\frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{T}_\infty - \frac{1}{2}\left[2\boldsymbol{T}_{m,n-1} + \boldsymbol{T}_{m-1,n} + \boldsymbol{T}_{m+1,n}\right] = 0$$

nó 6: $\boldsymbol{T}_6\left(\frac{200\times 0{,}1}{10} + 2\right) - \frac{200\times 0{,}1}{10}20 - \frac{1}{2}\left[2\boldsymbol{T}_3 + \boldsymbol{T}_5 + \boldsymbol{T}_7\right] = 0$, ou

$\boldsymbol{T}_6\left(\frac{200\times 0{,}1}{10} + 2\right) - \frac{200\times 0{,}1}{10}20 - \frac{1}{2}\left[2\boldsymbol{T}_3 + \boldsymbol{T}_5 + \boldsymbol{T}_7\right] = 0$, ou ainda,

$$T_3 + \frac{1}{2}T_5 - 4T_6 + \frac{1}{2}T_7 + 40 = 0$$

nó 7: $4\boldsymbol{T}_7 - 40 - \frac{1}{2}(2\boldsymbol{T}_4 + 2\boldsymbol{T}_6) = 0$, ou

$$T_4 + T_6 - 4T_7 + 40 = 0$$

Em forma de Matriz temos:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ -100 \\ -100 \\ 0 \\ -140 \\ -40 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Solução do sistema pelo método de eliminação gaussiana

$$T_1 = 90{,}4^\circ C$$
$$T_2 = 87{,}2^\circ C$$
$$T_3 = 74{,}3^\circ C$$
$$T_4 = 68{,}2^\circ C$$
$$T_5 = 44{,}7^\circ C$$
$$T_6 = 38{,}8^\circ C$$
$$T_7 = 36{,}7^\circ C$$