Soluções em Séries para Equações Diferenciais Ordinárias

Até o momento, neste curso, utilizamos técnicas algébricas para encontrar a solução de Equações Diferenciais Ordinárias. No entanto, quando estamos diante de E.D.O.s com coeficientes variáveis, exceto em pouquíssimas situações, como o caso da E.D.O. Euler Cauchy, os métodos vistos não são aplicáveis. Assim, é essencial que possamos estender nossa procura por soluções de E.D.O.s além das funções elementares usuais do cálculo. Uma das ferramentas utilizadas para tal propósito é representação de uma função por uma série. Portanto, antes de utilizarmos séries para resolução de E.D.O.s, vamos fazer uma rápida revisão de seqüências e séries, geralmente abordadas nos cursos de Cálculo IV.

Seqüências Numéricas

Uma seqüência numérica ou sucessão de números reais é uma função $n \longmapsto a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}$.

A notação a_n (leia: a índice n) é usada para indicar o valor que a seqüência assume no natural $\underline{n}$. Diremos, assim, que a_n é o termo geral da seqüência.

Exemplo 1: Seja a seqüência de termo geral $a_n = 2^n$. Dessa forma, temos:

$$a_0 = 2^0,\quad a_1 = 2^1,\quad a_2 = 2^2, \ldots$$

Exemplo 2: Seja a seqüência de termo geral $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Dessa forma, temos:

$$S_1 = 1,\quad S_2 = 1+2,\quad S_3 = 1+2+3, \ldots$$

Definição: Consideremos uma seqüência de termo geral a_n e seja $\underline{a}$ um número real. Definimos:

este símbolo significa se e somente se

(i): $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \iff$ para todo $\varepsilon > 0$, existir um número natural $\underline{n_0}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, ou $|a - a_n| < \varepsilon$

este símbolo significa implica

(ii): $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty \iff$ para todo $\varepsilon > 0$, existir um número natural $\underline{n_0}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n > \varepsilon$.

(iii): $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff$ para todo $\varepsilon > 0$, existir um número natural $\underline{n_0}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n < -\varepsilon$

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ for finito, diremos que a seqüência a_n é convergente; caso contrário, diremos que a seqüência é divergente.

Por exemplo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e = \text{número de Euler}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Seqüências Crescentes e Seqüências Decrescentes

Seja a_n uma seqüência. Dizemos que tal seqüência é crescente se, quaisquer que sejam os naturais m e n,

$$m < n \Rightarrow a_m < a_n$$

Se $a_m \leq a_n$ for trocado por $a_m \geq a_n$, então diremos que a seqüência é decrescente. Uma seqüência numérica é dita monótona se ela for sempre crescente ou decrescente. Dizemos que a seqüência a_n é limitada superiormente se existir um número β real tal que, para todo n natural, $a_n \leq \beta$. Dizemos que a seqüência a_n é limitada inferiormente se existir um número real α tal que, para todo natural n, $a_n \geq \alpha$. Dizemos, portanto, que a_n é uma seqüência limitada se existirem α e β reais tal que, para todo natural n, $\alpha \leq a_n \leq \beta$. Observe que a seqüência a_n é limitada se e somente se for limitada inferiormente e superiormente.

Teorema: Seja a_n uma seqüência crescente:

(i): Se a_n for limitada superiormente, então a_n será convergente;

(ii): Se a_n não for limitada superiormente, então a_n será divergente para $+\infty$.

Teorema: Seja a_n uma seqüência decrescente:

(i): Se a_n for limitada inferiormente, então a_n será convergente;

(ii): Se a_n não for limitada inferiormente, então a_n será divergente para $-\infty$.

Exemplo: Investigue a seqüência $\{a_n\}$ definida pela relação de recorrência

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6), \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Solução: Começandos calculando os primeiros termos

$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2}(a_1+6) = 4$, $a_3 = \frac{1}{2}(4+6) = 5$, $a_4 = \frac{1}{2}(5+6) = 5.5$; $a_5 = \frac{1}{2}(a_4+6) = \frac{1}{2}(5.5+6) = 5.75$, $a_6 = 5.875$, $a_7 = 5.9375$, $a_8 = 5.96875$, $a_9 = 5.984375$

Esses termos iniciais sugerem que a seqüência é crescente e os termos estão se aproximando de 6. Para confirmar que a seqüência é crescente, usamos indução matemática para mostrar que $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \geq 1$. Isso é verdade para $n = 1$, porque $a_2 = 4 > a_1$. Se assumirmos que isso é verdade para $n = k$, então temos:

$$a_{k+1} \geq a_k$$

Somando-se 6 em ambos os lados da inequação acima, temos:

$$a_{k+1} + 6 \geq a_k + 6$$

Em seguida, multiplicando-se ambos os lados por $\frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) \geq \frac{1}{2}(a_k + 6)$$

Portanto,

$$a_{k+2} \geq a_{k+1}$$

Deduzimos que $a_{n+1} \geq a_n$ é verdade para $n = k+1$. Portanto, por indução, a desigualdade é verdadeira para todo n. A seguir, verificamos que $\{a_n\}$ é limitada, mostrando que $a_n < 6$ para todo n (como a seqüência é crescente, já sabemos que ela tem um minorante: $a_n \geq a_1 = 2 \ \forall n$). Sabemos que $a_1 < 6$, assim a asserção é verdadeira para $n = 1$. Suponha que isso seja verdade para $n = k$. Então:

$$a_k < 6$$

Somando-se 6 a ambos os lados da inequação acima, temos:

$$a_k + 6 < 12$$

Multiplicando-se ambos os lados por $\frac{1}{2}$, chegamos à:

$$\frac{1}{2}(a_k+6) < \frac{1}{2}(12) = 6.$$

Então,

$$a_{k+1} < 6.$$

Isso mostra, por indução matemática, que $a_n < 6 \ \forall n$. Como a seqüência é crescente e limitada, então ela converge.

Série Numérica

Uma série é um símbolo de soma de $\underline{n}$ ou infinitos termos de uma seqüência a_n:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

A série pode ser abreviada usando-se o símbolo Σ:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

A cada série infinita Σa_n está associada a seqüência das somas parciais S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

O índice $\underline{j}$ na soma acima é um índice auxiliar tal que o resultado não depende de j.

Portanto,

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + \ldots + a_n$$

Definição: A serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente se a seqüência das somas parciais for convergente; a série será divergente se a seqüência das somas parciais for divergente. Se a série for convergente e a seqüência das somas parciais S_n convergir para S, então S será chamada de a soma da série, escrevendo-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Portanto, por definição,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$$

contanto que o limite exista. Se $\lim S_n = +\infty$ ou $\lim S_n = -\infty$, diz-se que a série $\sum a_n$ é propriamente divergente. Assim, se $a_n \geq 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou é convergente ou propriamente divergente. Como $a_n \geq 0$, temos:

$$S_1 = a_1 \leq S_2 = a_1 + a_2 \leq S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \leq \ldots$$

ou seja, os termos S_n formam uma seqüência monótona crescente. Se essa seqüência for limitada, ela convergirá; se ela não for limitada, então, necessariamente, $\lim S_n = \infty$, de modo que a série será divergente.

Exemplo: A série

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \ldots + \frac{2^n - 1}{2^n} + \ldots$$

é divergente, pois cada termo é pelo menos igual a $\frac{1}{2}$ e conseqüentemente:

$$S_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = n \cdot \frac{1}{2}$$

A seqüência S_n, embora seja monótona, não é limitada e $\lim S_n = \infty$.

Deve-se observar que os termos da série formam uma seqüência convergente, pois

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

Desse fato, não segue a convergência. De modo geral, devem-se distinguir as noções de série, seqüência dos termos de uma série, e a seqüência das somas parciais de uma série. A série é simplesmente um outro modo de se descrever a seqüência das somas parciais; os termos das séries descrevem as variações entre uma soma parcial e a soma seguinte.

Exemplo: A série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

é convergente. Aqui, as somas parciais formam a seqüência

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}$$

que como vimos acima converge para 1. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Propriedades das Séries

(I) Seja α um real dado. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \cdot a_n$ será convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(II) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ forem convergentes, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ será convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

(III) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ será convergente se e somente se, para todo natural p, $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ for convergente. Além disso, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, teremos, para $p \geq 2$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p-1} a_n + \sum_{n=p}^{+\infty} a_n$$