

P1 07/04  
P2 01/06  
P3 06/07  
Psub 11/07  
1

PMC-346 VIBRAÇÕES EM SISTEMAS MECANICOS

REVISÃO DE DINAMICA DOS SISTEMAS

Prof. Francisco E.B. Nigro

julho/1990

**-Introdução:**

O estudo da Dinâmica Clássica foi iniciado por Newton com as três leis básicas do movimento, baseadas na suposição da existência do espaço absoluto e do tempo absoluto. Tal limitação, porém, não chega a ser um impedimento à sua utilização na técnica. Quando devem ser resolvidos problemas nos quais entram efeitos gravitacionais, adota-se, além das três leis de Newton, a lei de Newton da gravitação.

O objetivo da Dinâmica é permitir prever a evolução de um sistema mecânico no tempo, sendo dadas as condições iniciais e as forças que agem nesse sistema, ou inversamente, sendo dado o movimento do sistema, determinar as forças que o produziram.

A formulação matemática para o desenvolvimento do assunto pode ser conseguida de duas maneiras: utilizando o método vetorial, usado por Newton, que dá ênfase às quantidades vetoriais força e aceleração; usando o método analítico, em grande parte devido a Lagrange, o qual aborda principalmente as quantidades escalares trabalho e energia.

O primeiro método é mais físico, e geralmente possui vantagens em situações nas quais estão presentes forças dissipativas. O segundo, mais matemático, é comumente útil no desenvolvimento de resultados gerais poderosos.

**II-As leis básicas e os sistemas de referência:**

A primeira lei do movimento afirma que: "um corpo que não está sob ação de nenhuma força permanece em repouso ou continua em movimento uniforme em linha reta". Essa assertiva é também conhecida como lei da inércia, sendo inércia aquela propriedade do corpo que exige a necessidade de uma força para modificar seu movimento. Massa inercial é a medida numérica da inércia. A comprovação experimental dessa lei não é possível, pela dificuldade de se atingirem as condições de total ausência de forças sobre o corpo.

Para se analisar o movimento de um corpo, é necessário escolher um sistema de referência, o qual é assumido rígido, e em relação ao qual seja possível medir o deslocamento, a velocidade,

etc., do corpo em movimento. A lei da inércia divide os possíveis sistemas de referência em duas classes: por exemplo, suponhamos que a lei da inércia seja válida em um certo sistema de referência  $S$ ; então ela deve ser válida em quaisquer outros sistemas de referência que tenham uma velocidade constante em relação a  $S$ , os quais são denominados sistemas inerciais; no entanto, a lei é falsa em quaisquer sistemas que estejam em movimento acelerado em relação a  $S$  (por exemplo, com movimento rotativo), que são ditos sistemas não inerciais. Como consequência, qualquer um da infinidade de sistemas inerciais de referência pode ser considerado em repouso, enquanto todos os outros estão em movimento retilíneo uniforme em relação a ele. As equações de transformação, que permitem correlacionar as observações relativas a dois sistemas inerciais de referência, podem ser deduzidas da segunda lei do movimento.

A segunda lei de Newton afirma que: "a força agindo sobre um corpo é igual à variação da sua quantidade de movimento em relação a um sistema inercial de referência".

A lei pode ser expressa na forma:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \vec{F} \quad (1)$$

que nos casos de massa  $m$  constante se reduz a:

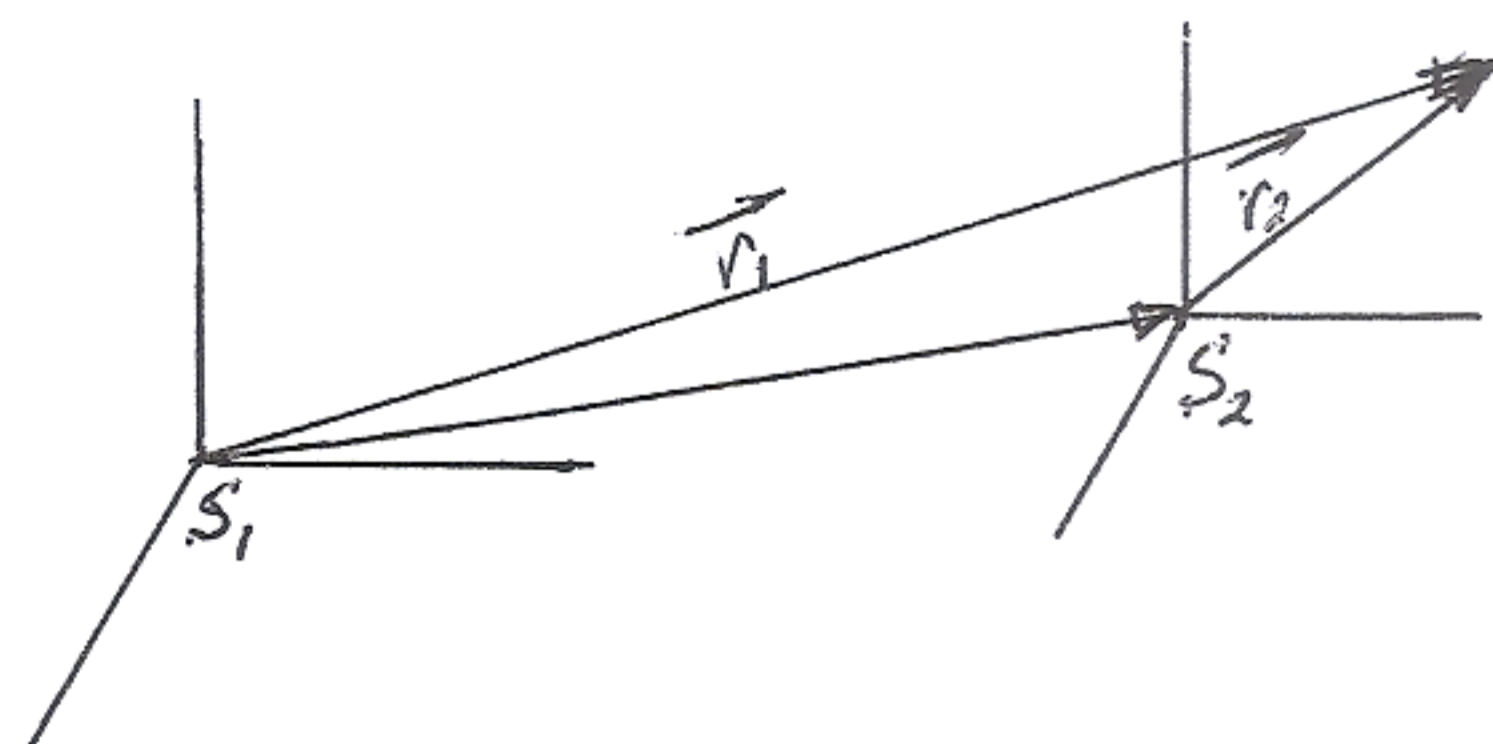
$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} \quad (2)$$

onde  $a$  é a aceleração da massa.

A terceira lei, lei da ação e reação, afirma que: "a força com que a massa  $m_1$  age na massa  $m_2$  é igual em grandeza, tem a mesma direção e sentido oposto à força com que  $m_2$  age em  $m_1$ ; também é necessária a assertiva adicional de que essas forças sejam colineares.

Serão apresentadas agora as equações de transformação, através das quais são correlacionadas as observações de um movimento em dois sistemas de referência.

Se uma massa em movimento é localizada pelos raios vetores  $r_1$  e  $r_2$  em relação à origem de dois sistemas inerciais  $S_1$  e  $S_2$  respectivamente, e se além disso,  $S_2$  tem um movimento em relação a  $S_1$  com velocidade  $v$  constante, então segue que:



$$\vec{r}_1 = \left[ S_2 - S_1 \right] + \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1 = t_2 \cdot \vec{v} + \vec{r}_2 + \vec{Cte} \quad (3)$$

$$t_1 = t_2 + c$$

onde  $t_1$  e  $t_2$  são os tempos medidos em  $S_1$  e  $S_2$ .

Quando, <sup>nessas</sup> as equações de transformação, as constantes dependem apenas da escolha da origem, <sup>sendo</sup> as transformações ~~são~~ chamadas transformações galileanas; é claro que a aceleração é um invariante nessas transformações.

As equações de transformação entre um sistema inercial de referência e um não inercial são consideravelmente mais complicadas que as equações (3). Sua dedução é facilitada pela aplicação do seguinte teorema: Em um triedro de referência  $S_2$ , o qual possui uma velocidade angular  $\vec{\omega}$  em relação a um sistema  $S_1$  de mesma origem, a variação com o tempo de qualquer vetor  $A$  como medido em  $S_2$  é relacionada à variação em  $S_1$  pela expressão:

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{S_1} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{S_2} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (4)$$

A interpretação da equação (4) é evidente. O primeiro termo do lado direito representa a variação de  $A$  em  $S_2$ , enquanto o segundo corresponde à mudança de direção devida à rotação do sistema.

Se  $S_1$  é um sistema inercial de referência e  $S_2$  um sistema rodando em relação a ele, como explicado no teorema anterior,  $S_2$  sendo portanto um sistema não inercial, a substituição do vetor  $A$  pelo vetor posição  $r$  na equação (4) leva a:

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5)$$

Na equação (5)  $v_{abs}$  representa a velocidade medida em relação a  $S_1$ ,  $v_{rel}$  a velocidade relativa a  $S_2$ , e  $(\omega \times r)$  a velocidade de arrastamento de um ponto rigidamente ligado a  $S_2$ . A equação para as acelerações é obtida por meio de uma segunda aplicação do teorema, como segue:

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{v}_{abs} \right)_{S_1} = \left. \frac{d}{dt} \left[ \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right] \right)_{S_2} + \vec{\omega} \times \left( \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right)$$

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (6)$$

onde  $(\dot{\omega})$  é a derivada de  $\omega$  em qualquer dos dois sistemas, <sup>uma vez que  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$  é o mesmo em  $S_1$  e  $S_2$</sup>  A interpretação física da equação (6) pode ser mostrada na forma:

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{cor} \quad (7)$$

onde  $a_{cor}$  representa a aceleração de Coriolis  $2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ .

Os resultados (5) e (7) constituem as equações de transformação entre um sistema inercial de referência e um não inercial.

As modificações requeridas nas expressões acima, para o caso em que o sistema  $S_2$  está em translação além de rotação relativamente a  $S_1$ , são feitas facilmente. Por exemplo, se  $\vec{D}(t)$  é o vetor posição da origem de  $S_2$  em relação a origem de  $S_1$ , a equação (5) é substituída por:

$$\left. \vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \frac{d}{dt} \vec{D} \right)_{S_1} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{arr} \quad (5')$$

e conseqüentemente, a equação (7) fica:

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \vec{D} \right)_{S_1} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}_{cor} \quad (7')$$

$$\text{onde } \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \vec{D} \right)_{S_1} = \vec{a}_{arr}$$

Na prática, a decisão do que pode ser considerado como sistema inercial de referência depende da precisão desejada na análise. Em muitos casos, um conjunto de eixos rigidamente ligados a superfície da terra é suficiente, embora tal sistema seja não inercial pois toma parte na rotação diária da terra em torno de seu eixo, bem como na rotação anual ao redor do sol.

### III-Dinâmica de um sistema de massas:

A localização de um sistema de massas no espaço, envolve a determinação de um certo número de variáveis função do tempo. O número mínimo dessas variáveis, que não pode ser reduzido sem ~~a~~

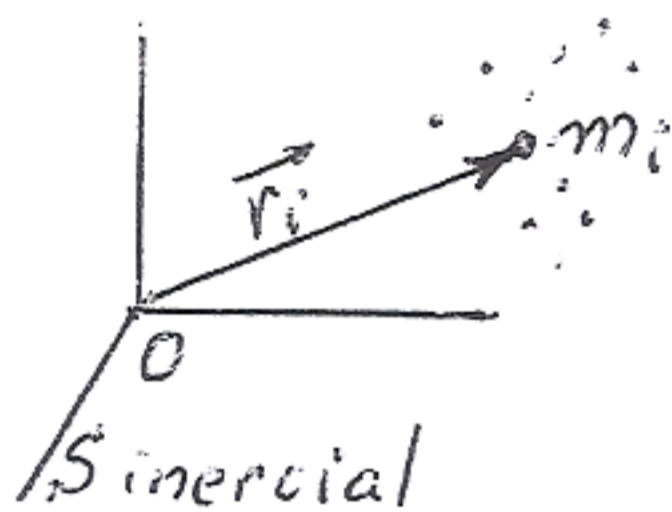
*restrição do sistema*  
~~restrições~~

*desta*

~~imposição de vínculos~~, é uma característica do sistema, que é denominada número de graus de liberdade do sistema. Uma massa pontual livre no espaço tem três graus de liberdade. O sistema de duas massas livres no espaço, mas sujeitas ao vínculo de que a distância entre elas seja constante, possui 5 graus de liberdade; é claro que a presença de vínculos diminui o número de graus de liberdade do sistema.

Na análise de um sistema de massas existem três possibilidades. Em primeiro lugar, o sistema pode consistir de um número pequeno de massas e portanto seu número de graus de liberdade será pequeno. Em segundo lugar, o sistema pode ser formado de um grande número de pontos de massa sujeitos a um grande número de equações vinculares, de modo que o número de graus de liberdade do sistema seja pequeno. Isso acontece no caso de um sólido. Finalmente, pode ser que os vínculos em um sistema que contém um número muito grande de massas não sejam suficientes para reduzir sensivelmente seu número de graus de liberdade. Este caso é tratado em Mecânica Estatística, onde os graus de liberdade são reduzidos por métodos estatísticos.

A seguir derivaremos os resultados fundamentais relacionados à dinâmica de um sistema de massas. Assume-se que o sistema seja constituído de  $n$  massas constantes,  $m_i (i=1, 2, \dots, n)$ . O vetor posição de  $m_i$  relativo à origem do sistema de referência inercial pode ser chamado  $r_i$ . A força agindo em  $m_i$  é representada na forma:



$$\vec{F}_i = \vec{F}_{e_i} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \quad (8)$$

onde  $F_{e_i}$  é a força externa ao sistema agindo em  $m_i$ ;  $F_{ij}$  é a força exercida em  $m_i$  por  $m_j$  e  $F_{ii}$  é identicamente nula.

*ela própria definição de posição da massa*

O movimento do centro de massa de um sistema pode ser determinada a partir da ~~movimento~~ <sup>posição</sup> de todas as massas do sistema, através de:

$$M \cdot \vec{r}_C = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i \quad (9)$$

onde  $M$  é a massa total do sistema.

O movimento da massa  $m_i$  em relação ao triedro de referência inercial é determinado pela equação: ~~equação~~ *2ª Lei de Newton, como segui*

$$\frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_e^i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \quad (10)$$

Somando-se n equações desse tipo, vem:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_e^i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_e \quad (11a)$$

Uma vez que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = 0$$

pois pela terceira lei

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{ii} = 0$$

Na equação (11a)

onde  $\vec{F}_e$  é a resultante de todas as forças externas agindo no sistema.

Derivando a equação (9) em relação ao tempo, obtemos:

$$M \cdot \vec{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (12)$$

e portanto a equação (11a) para um sistema de massa constante se torna:

$$M \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_c = \vec{F}_e \quad (13)$$

o que prova o teorema: "O centro de massa de um sistema se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nele, e a resultante de todas as forças externas também agindo lá". Essa conclusão, obviamente, é válida para um corpo rígido.

Duas integrações da equação (13) <sup>também</sup> dão resultados muito úteis (equações (14) e (15)):

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e \cdot dt = \left[ M \vec{v}_c \right]_{t_2} - \left[ M \vec{v}_c \right]_{t_1} \quad (14)$$

A integral do lado esquerdo é chamada **impulso da força externa**. Essa equação mostra que a variação da quantidade de movimento do centro de massa é igual ao impulso da força externa. Isto leva ao teorema da conservação da quantidade de movimento: "A quantidade de movimento do centro de massa é constante se a resultante das forças externas que agem no sistema é nula" ou ainda, quando se considera a equação (12): "A quantidade de movimento <sup>do centro de massa</sup> do sistema é constante se a resultante das forças externas que agem no sistema é nula".

Uma outra integração leva a:

$$\int_1^2 \vec{F}_e \cdot d\vec{r}_c = \frac{1}{2} \cdot M \left[ \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c \right]_2 - \frac{1}{2} \cdot M \left[ \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c \right]_1 \quad (15)$$

que é o **teorema do trabalho e energia**: "O trabalho realizado pela resultante das forças externas agindo no centro de massa é igual à variação da energia cinética do centro de massa".

Em certos casos a força externa  $F_e$  pode ser o gradiente de uma quantidade escalar  $V$ , que é função somente da posição. Nesta situação,

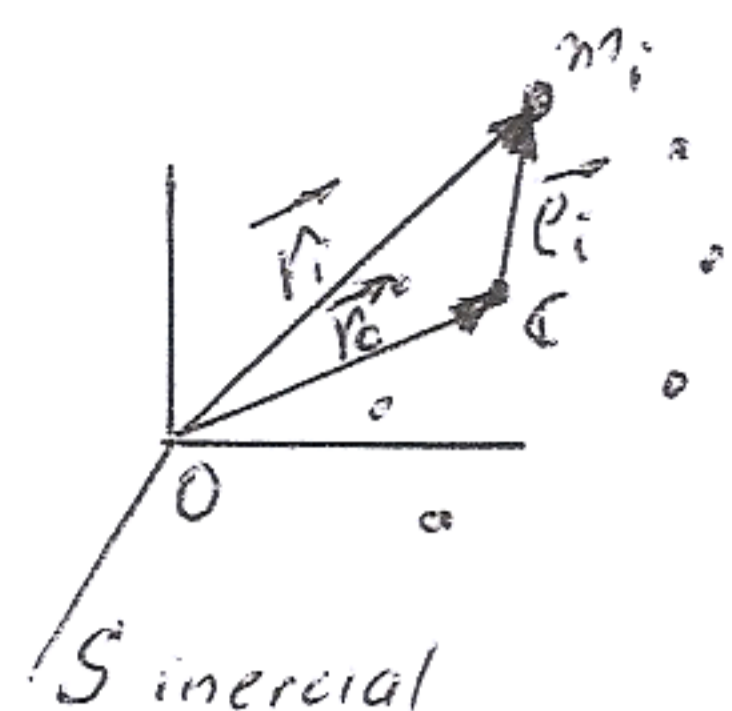
$$\vec{F}_e = -\frac{\delta V}{\delta \vec{r}_c}$$

e a equação (15) toma a forma:

$$\left[ \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_c^2 + V \right]_2 = \left[ \frac{1}{2} M \cdot v_c^2 + V \right]_1 \quad (16)$$

Se uma tal função  $V$  existe, o campo de forças é dito conservativo, e a equação (16) representa o teorema da conservação de energia.

A energia cinética de um sistema <sup>de massas</sup> é a soma da energia cinética de suas massas individuais. No entanto, é possível reunir essa soma em uma forma que frequentemente torna o cálculo da energia cinética menos difícil. A energia cinética total das massas em seu movimento em relação a  $O$ :



$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right] \quad (17)$$

$$\text{mas } \vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i$$

onde  $\rho_i$  é o vetor posição de  $m_i$  em relação ao centro de massa C do sistema. Portanto:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ m_i \cdot \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c \right] + \sum_{i=1}^n \left[ m_i \vec{v}_c \cdot \dot{\vec{\rho}}_i \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ m_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i \right]$$

mas

$$\sum_{i=1}^n \left[ m_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i \right] = \vec{0}$$

*peça própria*

por definição de centro de massa. Então,

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ m_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i^2 \right] \quad (18)$$

o que prova o teorema: "A energia cinética total de um sistema de partículas é igual a energia cinética do movimento do centro de massa, mais a energia cinética do movimento em torno do centro de massa".

No caso do sistema ser um sólido,

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

e a expressão (18) toma a forma:

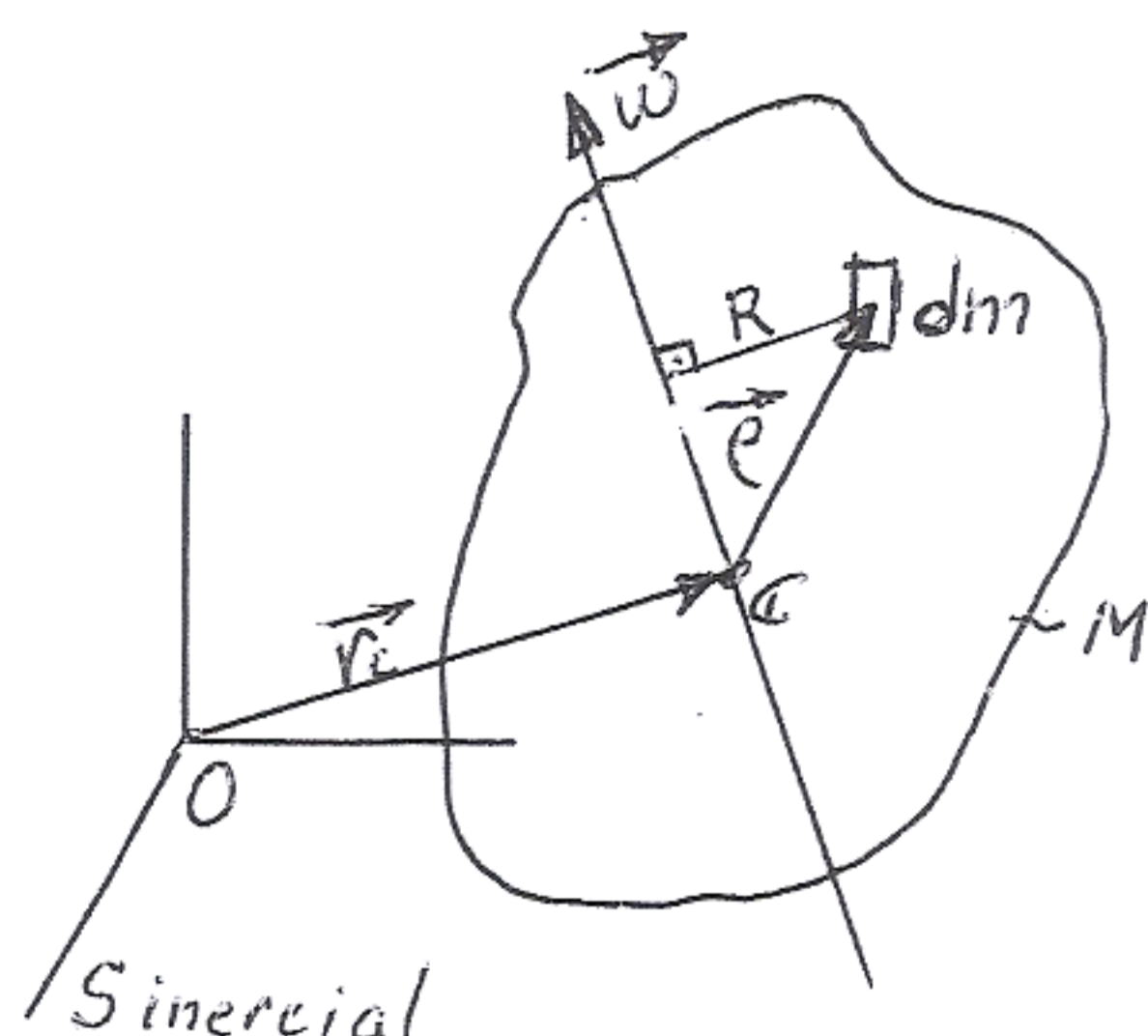
$$T = \frac{1}{2} M \cdot v_c^2 + \frac{1}{2} \int_M \left[ \vec{\omega} \times \vec{\rho} \right]^2 \cdot dm$$

mas

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \omega \cdot \vec{e}_\omega \times \vec{\rho} \quad \text{ou ainda}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \omega \cdot R \cdot \vec{e}_\varphi$$

onde R é a distância do ponto ao eixo de rotação, pelo centro de massa. Portanto:



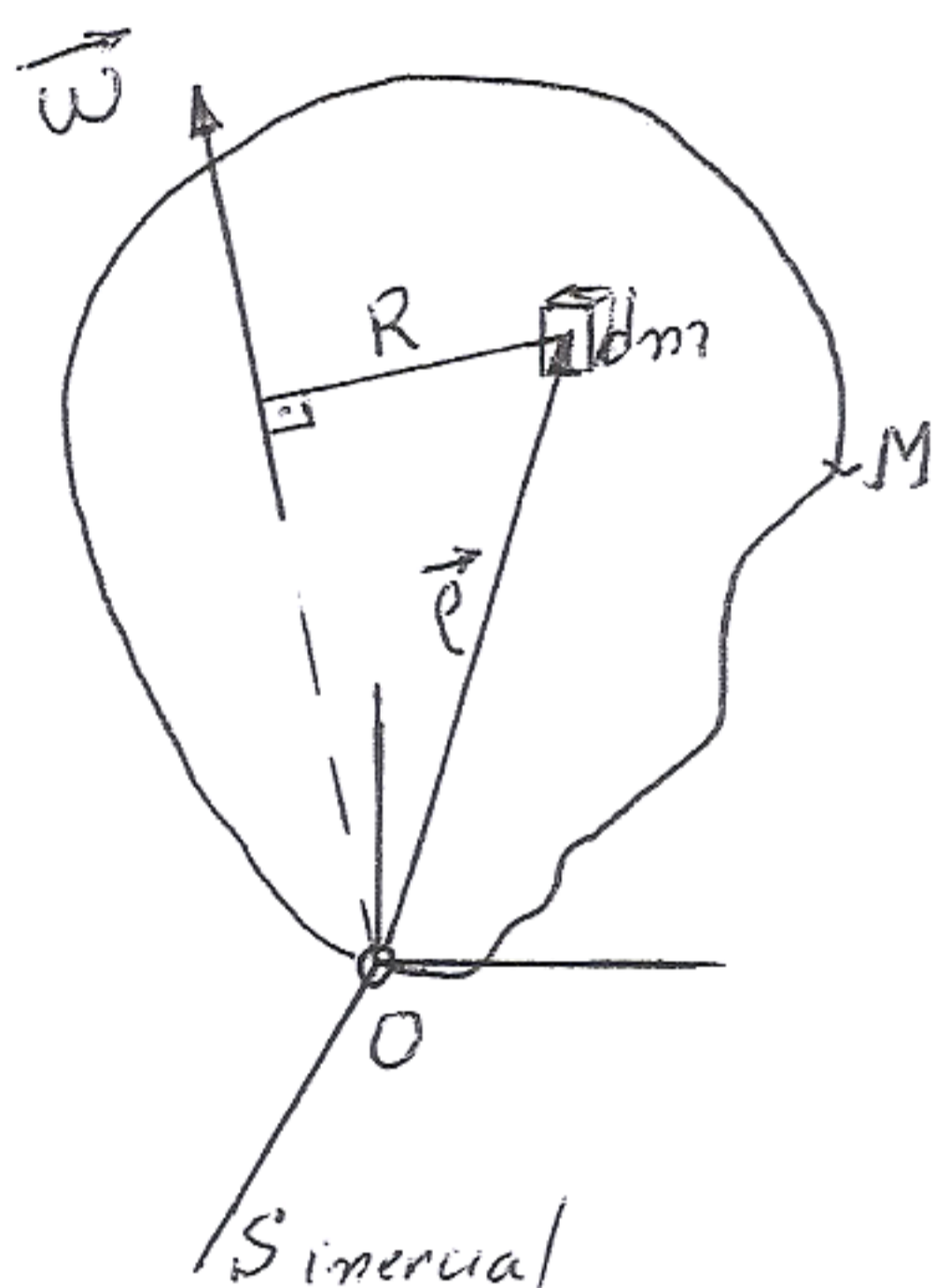


$$T = \frac{1}{2} M \cdot v_c^2 + \frac{1}{2} \int_M (\omega \cdot R)^2 \cdot dm \quad \text{ou ainda}$$

$$T = \frac{1}{2} M \cdot v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \cdot \omega^2 \quad (19)$$

onde  $I_c$  é o momento de inércia do corpo em relação a <sup>que passa</sup> um eixo pelo centro de massa, ~~e qual~~ qual tem a direção do vetor velocidade angular.

Ainda no caso de um sólido, se o mesmo tem um ponto instantaneamente fixo  $O$  e um vetor de rotação  $\omega$ , podemos escrever:



$$T = \frac{1}{2} \int_M [\vec{v} \cdot \vec{v}] \cdot dm$$

mas  $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

onde  $\vec{v}_O = \vec{0}$

e portanto  $\vec{v} \cdot \vec{v} = (\omega \cdot R)^2$

Neste caso:

$$T = \frac{1}{2} \cdot I_O \omega^2 \quad (20)$$

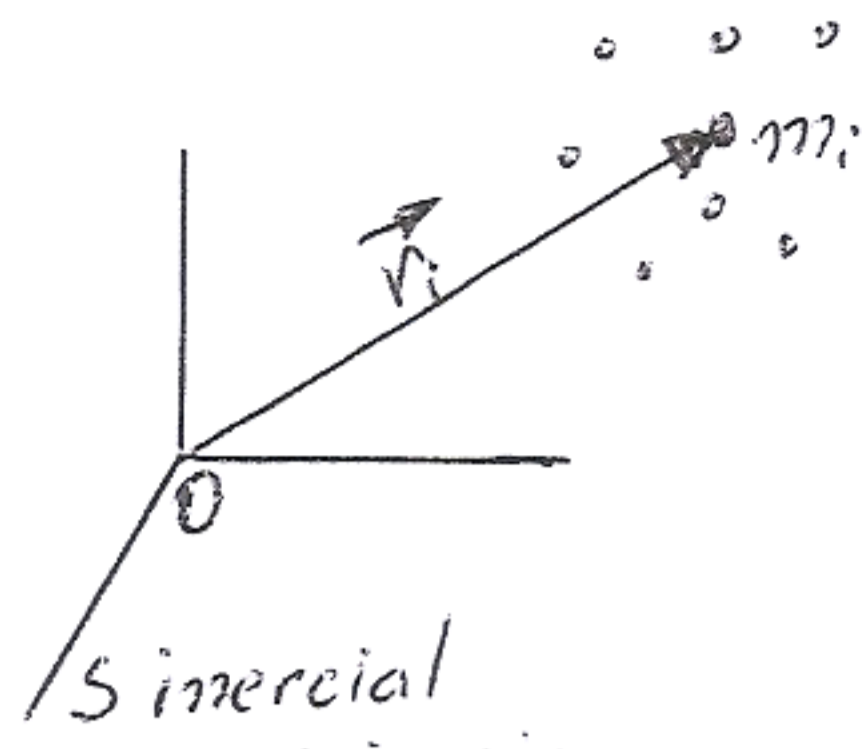
onde  $I_O$  <sup>é</sup> o momento de inércia do corpo em relação ao eixo instantâneo de rotação. Se o eixo de rotação é fixo no corpo,  $I_O$  é constante, se não, varia de instante para instante.

Vamos relembrar, agora, o conceito de momento angular de um sistema de massas.

Cada massa  $m_i$  do sistema tem associada a ela o vetor quantidade de movimento  $m_i \vec{v}_i$ . O momento da quantidade de movimento em relação a um polo  $O$  é o momento angular dessa massa, que pode ser representado por:

$$\vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i$$

O momento angular do sistema de massas em relação a um polo inercial  $O_i$  fica:



$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i]$$

Segue que

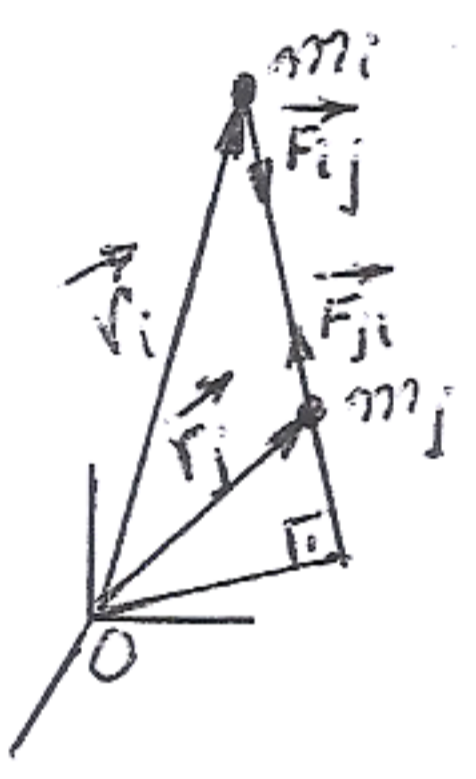
$$\frac{d}{dt} \vec{H}_O = \sum_{i=1}^n [\dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i] + \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i]$$

*o 1º termo é nulo*

onde o primeiro termo da equação acima é nulo, pois O é inercial. Utilizando a equação (8), obtemos:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{e_i} \tag{21}$$

Admitindo que a terceira lei de Newton implica também na colinearidade de  $F_{ij}$  com  $F_{ji}$ , e que a linha de ação dessas forças coincide com a linha que liga  $m_i$  a  $m_j$ , isto é, que as forças internas são forças centrais, a dupla somatória da equação (21) se anula e obtemos:



$$\frac{d}{dt} \vec{H}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{e_i} \quad \text{Portanto:}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_O = \vec{M}_O \tag{22}$$

onde  $M_O$  representa o momento das forças externas em relação ao polo O.

A extensão que se segue desse resultado a certos polos não inerciais é muito útil. Seja A um polo arbitrário com vetor posição  $a$  em relação ao polo inercial O. Se  $p_i$  é o vetor posição de  $m_i$  em relação a A, segue:

$$\vec{H}_A = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i \quad \vec{H}_A = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i - \vec{a}] \times m_i \cdot \vec{v}_i$$

Portanto:  $\vec{H}_A = \vec{H}_O - \vec{a} \times M \cdot \vec{v}_C$  ou derivando:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_A = \frac{d}{dt} \vec{H}_O - \dot{\vec{a}} \times M \cdot \vec{v}_C - \vec{a} \times M \cdot \dot{\vec{v}}_C$$

$$\text{ou } \frac{d}{dt} \vec{H}_A = \vec{M}_A - \dot{\vec{a}} \times M \cdot \vec{v}_C \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{H}_A &= \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n (\vec{p}_i - \vec{a}) \wedge m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \wedge (F_{e_i} + \sum_{j=1}^n F_{ij}) - \dot{\vec{a}} \wedge \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \wedge F_{e_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{\vec{p}}_i \wedge F_{ij} - \dot{\vec{a}} \wedge M \vec{v}_C = \vec{M}_A - \dot{\vec{a}} \wedge M \vec{v}_C \end{aligned}$$

Se:

1)  $da/dt = 0$ , isto é, o ponto A é fixo em relação a O (sistema inercial), ou

2)  $da/dt$  é paralelo a  $v_c$ , isto é, o ponto A está se movendo paralelamente ao centro de massa, ou é o centro de massa, então, vale a equação:

$$\frac{d\vec{H}_A}{dt} = \vec{M}_A \quad (24)$$

Os resultados precedentes estão resumidos no seguinte teorema: "A variação no tempo do momento angular em relação a um polo é igual ao momento das forças externas em relação aquele polo, se o polo é inercial, está se movendo paralelamente ao centro de massa ou é o centro de massa. Como corolário do teorema, pode-se mostrar que o momento angular em relação a um polo permanece inalterado se o momento das forças externas em relação ao polo é zero.

É válido ressaltar que as expressões do momento angular até aqui utilizadas exigem o uso da velocidade absoluta de cada ponto de massa, mesmo quando o polo do momento é não inercial. Muitas vezes entretanto, é necessário considerar o momento da quantidade do movimento ~~relativo~~ <sup>relativo ao polo</sup> para simplificar o cálculo do momento angular. Neste caso, sendo A o polo arbitrário de momento obtemos:

mas

$$\vec{H}_{A_{rel}} = \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_i \times m_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i \quad \frac{d\vec{H}_{A_{rel}}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_i \wedge m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{a}}) =$$

$$\dot{\vec{\rho}}_i = \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{a}}$$

$$\vec{H}_{A_{rel}} = \vec{H}_A + \dot{\vec{a}} \times \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{\rho}_i$$

$$\vec{H}_{A_{rel}} = \vec{H}_A + \dot{\vec{a}} \times \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{a}) \quad M\vec{e}_c$$

$$\frac{d\vec{H}_{A_{rel}}}{dt} = \frac{d\vec{H}_A}{dt} + \dot{\vec{a}} \times \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{a}) + \dot{\vec{a}} \times \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{a}})$$

Usando (23) e a definição de baricentro, a última expressão se reduz a:

$$\frac{d \vec{H}_{A \text{ rel}}}{dt} = \vec{M}_A + M \cdot \vec{a} \times (\vec{r}_C - \vec{a}) \quad (25)$$

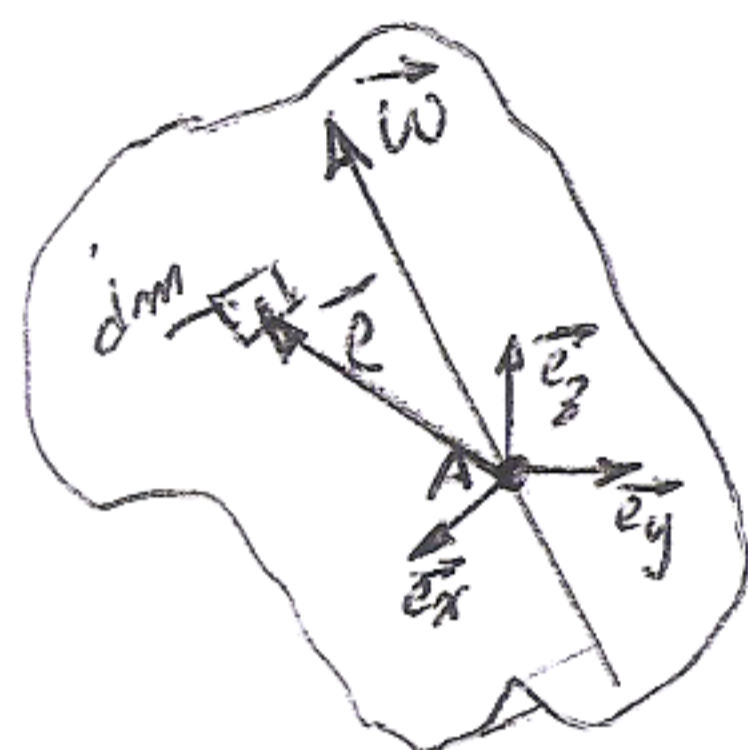
A equação acima é usualmente apresentada como sendo a forma geral do teorema do momento angular.

Se o ponto A é o centro de massa C do corpo, então a equação (25) se reduz a:

$$\frac{d \vec{H}_{C \text{ rel}}}{dt} = \vec{M}_{AC}$$

que frequentemente simplifica o cálculo de  $H_C$ .

Os teoremas anteriormente discutidos valem também para um sólido. No caso de um polo de momento pertencente ao corpo, as equações se simplificam como segue.



$$\vec{H}_{A \text{ rel}} = \int_M (\vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}}) \cdot dm$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{H}_{A \text{ rel}} = \int_M \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot dm \quad (26)$$

Vamos calcular  $\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$  utilizando o sistema de eixos  $\{e_x, e_y, e_z\}$  preso ao corpo

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \rho_x & \rho_y & \rho_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = (\omega_y \rho_z - \omega_z \rho_y) \cdot \vec{e}_x + (\omega_z \rho_x - \omega_x \rho_z) \cdot \vec{e}_y + (\omega_x \rho_y - \omega_y \rho_x) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \rho_x & \rho_y & \rho_z \\ (\omega_y \rho_z - \omega_z \rho_y) & (\omega_z \rho_x - \omega_x \rho_z) & (\omega_x \rho_y - \omega_y \rho_x) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) &= \left[ \omega_x (\rho_y^2 + \rho_z^2) - \omega_y \rho_x \rho_y - \omega_z \rho_x \rho_z \right] \cdot \vec{e}_x + \\ &+ \left[ -\omega_x \rho_x \rho_y + \omega_y (\rho_x^2 + \rho_z^2) - \omega_z \rho_y \rho_z \right] \cdot \vec{e}_y + \\ &+ \left[ -\omega_x \rho_x \rho_z - \omega_y \rho_y \rho_z + \omega_z (\rho_x^2 + \rho_y^2) \right] \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Lembrando que:

$$J_{xx} = \int_M (\rho_y^2 + \rho_z^2) \cdot dm \quad (27)$$

$$J_{xy} = \int_M \rho_x \cdot \rho_y \cdot dm$$

vem:

$$\begin{aligned} \vec{H}_{A \text{ rel}} &= \left[ J_{xx} \cdot \omega_x - J_{xy} \cdot \omega_y - J_{xz} \cdot \omega_z \right] \cdot \vec{e}_x + \\ &+ \left[ -J_{xy} \cdot \omega_x + J_{yy} \cdot \omega_y - J_{yz} \cdot \omega_z \right] \cdot \vec{e}_y + \\ &+ \left[ -J_{xz} \cdot \omega_x - J_{yz} \cdot \omega_y + J_{zz} \cdot \omega_z \right] \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

que pode ser escrito como:

*em forma matricial*

$$\begin{Bmatrix} H_{Ax} \\ H_{Ay} \\ H_{Az} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$\vec{H}_{A \text{ rel}} = [J] \cdot \vec{\omega} \quad (30)$$

Devemos notar que  $H_A$  e  $\omega$  são vetores e  $[J]$  um operador linear que leva  $\omega$  em  $H_A$ . Se alterarmos o sistema de coordenadas, as componentes dos vetores mudam mas eles não; portanto,  $[J]$  é um tensor, denominado tensor de inércia. Uma vez que o tensor é simétrico e os termos da diagonal <sup>são</sup> positivos, pode-se provar que existe um sistema de eixos tri-ortogonais que torna os produtos de inércia nulos, <sup>transformando</sup> portanto a matriz dos componentes do ~~vetor~~ <sup>tensor</sup> em matriz diagonal (equação 32).

$$[J] \cdot \vec{\omega} = \int_M \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot dm$$

*Tensor calculado no sistema de coordenadas formado por esses eixos (31)*

$$\begin{Bmatrix} H_{A1} \\ H_{A2} \\ H_{A3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

*Esses eixos são denominados eixos principais de inércia; se além disso eles passam pelo centro de massa do corpo, são denominados eixos centrais de inércia. Note-se que, se  $\omega$  tem a direção dos eixos principais de inércia,  $H$  é paralelo a  $\omega$ . Tal fato permite determinar essas direções, como segue:*

Esses eixos são denominados eixos principais de inércia; se além disso eles passam pelo centro de massa do corpo, são denominados eixos centrais de inércia. Note-se que, se  $\omega$  tem a direção dos eixos principais de inércia,  $H$  é paralelo a  $\omega$ . Tal fato permite determinar essas direções, como segue:

$$\vec{H}_{A_{rel}} = [J] \omega \cdot \vec{e}_\omega = \lambda \cdot \omega \cdot \vec{e}_\omega \quad (33)$$

$$\vec{e}_\omega = \alpha_x \cdot \vec{e}_x + \alpha_y \cdot \vec{e}_y + \alpha_z \cdot \vec{e}_z \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{Bmatrix} = \lambda \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{Bmatrix}$$

ou portanto:

$$[[J] - \lambda \cdot [I]] \cdot \{\vec{e}_\omega\} = \{\vec{0}\}, \quad \text{com } [I] \text{ significando a matriz identidade unitária.}$$

A igualdade acima,

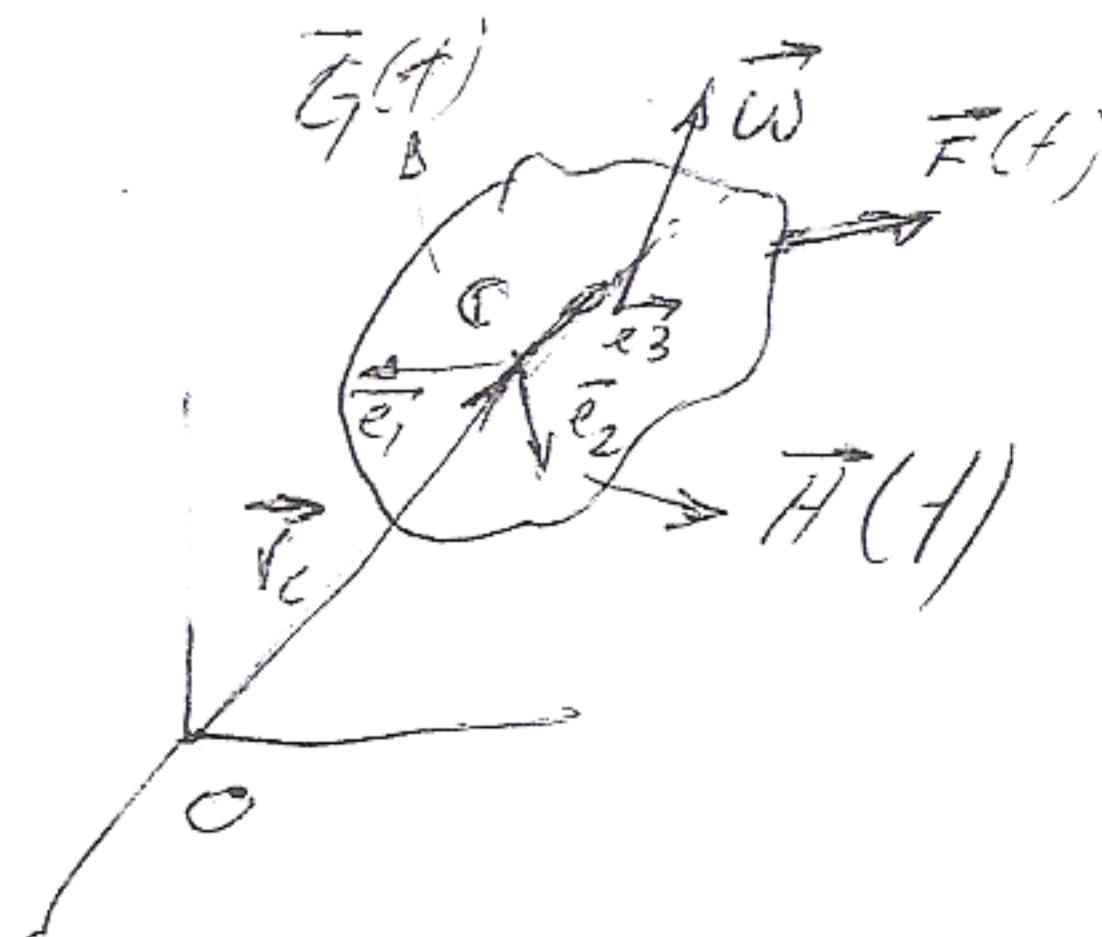
que define um problema de auto-valores, cuja solução permite determinar as direções principais de inércia (auto-vetores).

IV - Aplicações do equacionamento para dois casos importantes

Vamos discutir, agora, o equacionamento do movimento de um sólido livre no espaço, sujeito a forças externas. Uma equação vetorial para estudar o movimento do sólido vem do T.M.B. (teorema do movimento do baricentro), que não nos sujeitamos a escrever. A outra equação vetorial, que completa o conjunto de seis equações escalares referentes aos seis graus de liberdade do sólido, vem do T.M.A. (teorema do momento angular), aplicado a um ponto notável do sólido. Evidentemente, escolheremos o centro de massa como polo do vetor momento angular, e o representaremos segundo as direções principais de inércia. Neste caso, vem:

$$\vec{H}_C = J_1 \cdot \omega_1 \cdot \vec{e}_1 + J_2 \cdot \omega_2 \cdot \vec{e}_2 + J_3 \cdot \omega_3 \cdot \vec{e}_3 \quad (37)$$

Derivando em relação ao tempo,



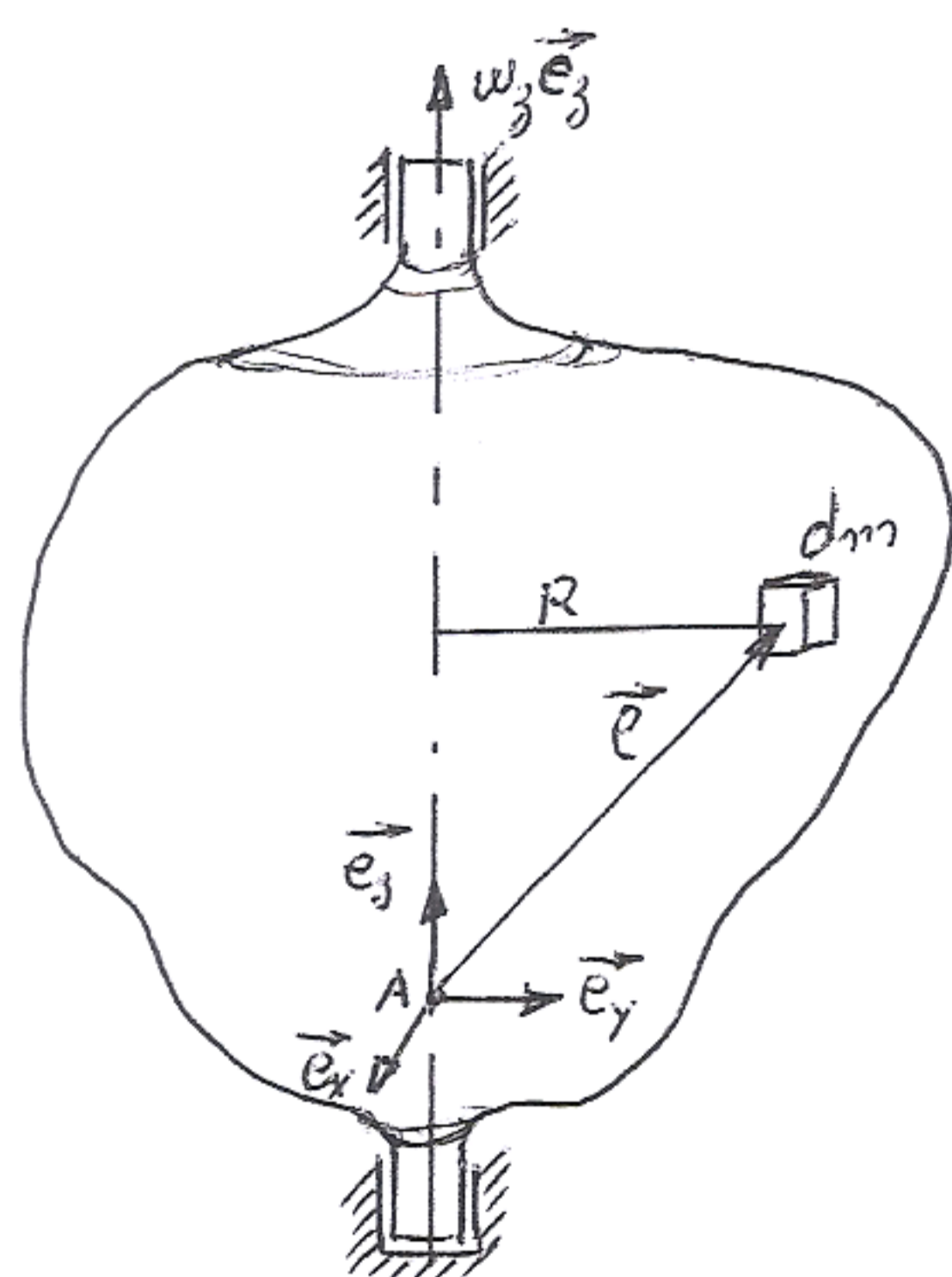
$$\begin{aligned} \frac{d \vec{H}_C}{dt} = & J_1 \cdot \left[ \dot{\omega}_1 \cdot \vec{e}_1 + \omega_1 \cdot \vec{\omega} \times \vec{e}_1 \right] + J_2 \cdot \left[ \dot{\omega}_2 \cdot \vec{e}_2 + \omega_2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{e}_2 \right] + \\ & + J_3 \left[ \dot{\omega}_3 \cdot \vec{e}_3 + \omega_3 \cdot \vec{\omega} \times \vec{e}_3 \right] \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{H}_C}{dt} = & \left[ J_1 \cdot \dot{\omega}_1 - \left( J_2 - J_3 \right) \omega_2 \cdot \omega_3 \right] \cdot \vec{e}_1 + \\ & + \left[ J_2 \cdot \dot{\omega}_2 - \left( J_3 - J_1 \right) \omega_1 \cdot \omega_3 \right] \cdot \vec{e}_2 + \\ & + \left[ J_3 \cdot \dot{\omega}_3 - \left( J_1 - J_2 \right) \omega_1 \cdot \omega_2 \right] \cdot \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Igualando ao momento das forças externas em relação a C, obtemos as equações de Euler (equações 39), que integradas em conjunto com as outras tres equações diferenciais do movimento do baricentro, permitem calcular a evolução no tempo das seis coordenadas que dão a posição do corpo rígido no espaço.

$$\begin{aligned} M_{C1} &= J_1 \cdot \dot{\omega}_1 - \left[ J_2 - J_3 \right] \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \\ M_{C2} &= J_2 \cdot \dot{\omega}_2 - \left[ J_3 - J_1 \right] \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 \\ M_{C3} &= J_3 \cdot \dot{\omega}_3 - \left[ J_1 - J_2 \right] \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \end{aligned} \quad (39)$$

Consideremos, agora, o problema de um sólido livre para girar em torno de um eixo fixo segundo a direção ez. Escrevendo a equação do momento angular em relação a um ponto do eixo fixo, num sistema de eixos preso ao corpo, obtemos:



$$\vec{H}_A = -J_{xz} \cdot \omega_z \cdot \vec{e}_x - J_{yz} \cdot \omega_z \cdot \vec{e}_y + J_{zz} \cdot \omega_z \cdot \vec{e}_z \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{H}_A}{dt} = & \left[ -J_{xz} \cdot \dot{\omega}_z + J_{yz} \cdot \omega_z^2 \right] \cdot \vec{e}_x + \\ & - \left[ J_{yz} \cdot \dot{\omega}_z + J_{xz} \cdot \omega_z^2 \right] \cdot \vec{e}_y + J_{zz} \cdot \dot{\omega}_z \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

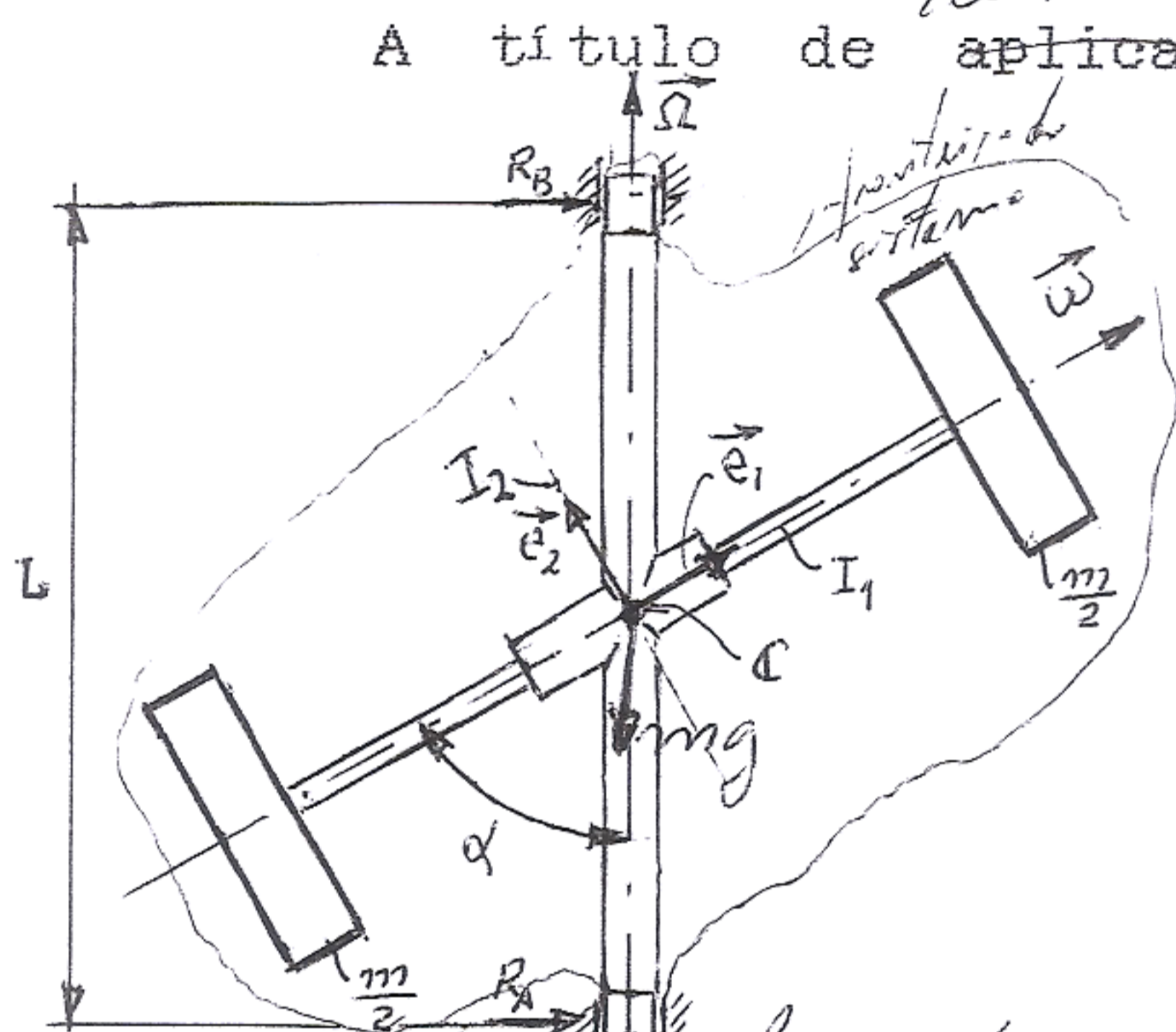
Igualando ao momento das forças externas, obtemos as equações (41) que permitem calcular a evolução do sistema no tempo. Notemos que, se

$J_{xz}$  e  $J_{yz}$  forem nulos, não aparecem momentos de força segundo os eixos ortogonais ao eixo  $e_z$ .

$$\begin{aligned} M_{Ax} &= -J_{xz} \cdot \dot{\omega}_z + J_{yz} \cdot \omega_z^2 \\ M_{Ay} &= -J_{yz} \cdot \dot{\omega}_z - J_{xz} \cdot \omega_z^2 \\ M_{Az} &= J_{zz} \cdot \dot{\omega}_z \end{aligned} \quad (41)$$

**V-Momento giroscópico:**

*ilustração vamos aplicar*



A título de aplicação do equacionamento desenvolvido anteriormente, vamos discutir o sistema formado de dois discos dispostos simetricamente como na figura, que giram com velocidade angular  $\omega$  em relação à cruzeta de arraste. Ao mesmo tempo, a cruzeta gira com velocidade angular  $\Omega$  em torno de um eixo vertical. A massa da estrutura de arraste é desprezível face a massa  $m$  dos discos, que possuem momento de inércia  $I_1$  em relação ao seu eixo, e  $I_2$  em relação ao eixo ortogonal por C. Deseja-se calcular as reações radiais nos mancais A e B.

*Consideremos o sistema quando considerado pelo ponto indicado na figura, subentende-se as forças ext. e o ponto de apoio.*  
 Quando consideramos que o centro de massa do sistema está fixo, concluímos que a resultante das forças externas é nula, e portanto que:

$$F_{Axial} = m \cdot g \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$$

Tomando o momento angular em relação ao polo C, que além de ponto fixo é também o centro de massa, obtemos:

$$\vec{H}_C = I_1 \cdot (\omega + \Omega \cdot \cos\alpha) \cdot \vec{e}_1 + I_2 \cdot \Omega \cdot \sin\alpha \cdot \vec{e}_2$$

Note-se que a velocidade angular utilizada é a velocidade absoluta do rotor, *aquele apaisar do sistema de eixos estar fixo no eixo, I1 e I2 são constantes* Derivando  $H_C$  em relação ao tempo, considerando *brun* que o sistema de coordenadas é arrastado com  $\Omega$ , vem: *duas* *simult* *1070*

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_C = I_1 \cdot (\omega + \Omega \cdot \cos\alpha) \cdot \vec{\Omega} \times \vec{e}_1 + I_2 \cdot \Omega \cdot \sin\alpha \cdot \vec{\Omega} \times \vec{e}_2$$

Portanto,



$$\frac{d}{dt} \vec{H}_C = -I_1 \cdot (\omega + \Omega \cdot \cos\alpha) \cdot \Omega \cdot \sin\alpha \cdot \vec{e}_3 + I_2 \cdot \Omega^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{M}_C = R_A \cdot L \cdot \vec{e}_3 = \left[ (I_2 - I_1) \cdot \Omega^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - I_1 \cdot \omega \cdot \Omega \cdot \sin\alpha \right] \cdot \vec{e}_3$$

Se  $\omega$  é nulo, e se  $I_2 > I_1$ , a força de inércia nos discos tende a abrir a estrutura, e  $R_A$  é positivo. Entretanto, se  $\omega$  é muito grande, o segundo termo do segundo membro da equação se torna dominante, e  $R_A$  fica negativo. Note-se que, devido a rotação dos discos, aparece um momento que tende a alinhar o vetor rotação  $\omega$  com o vetor velocidade angular de arrastamento. A esse momento denominamos momento giroscópico.

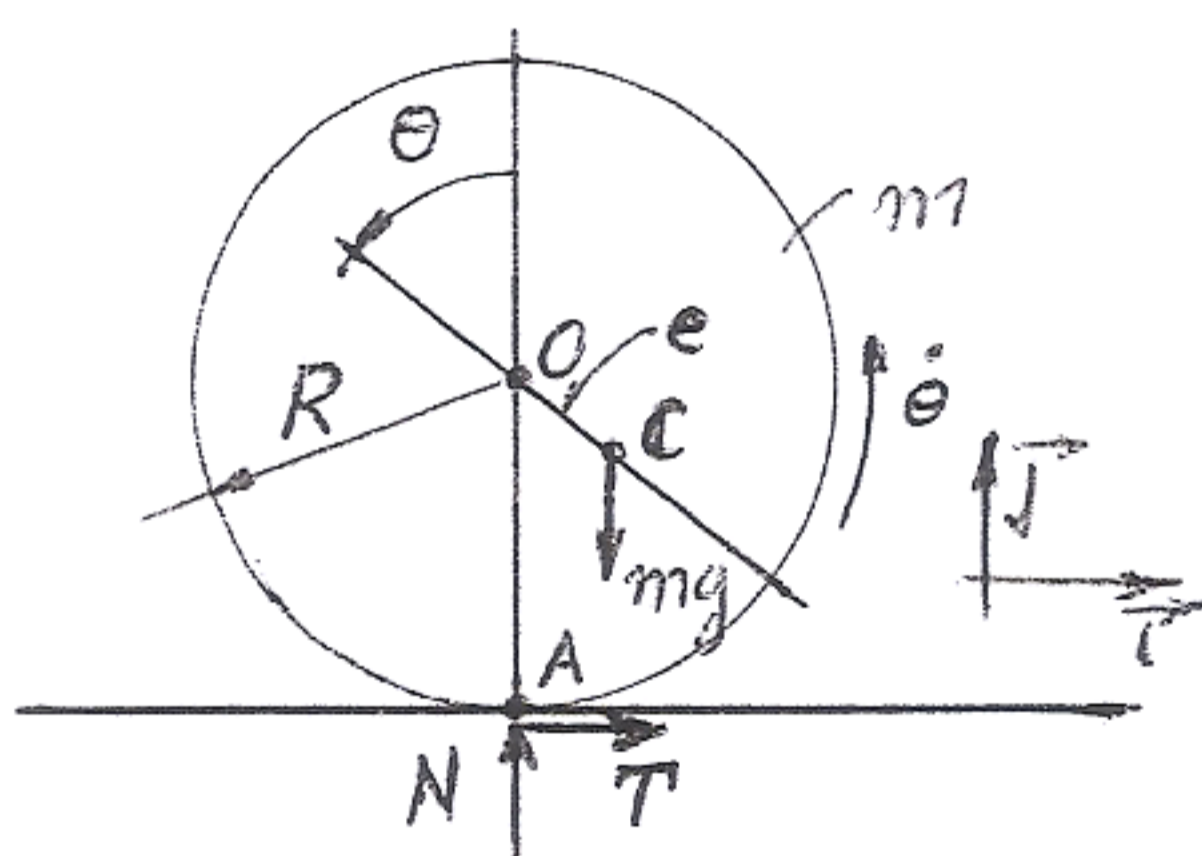
$$\vec{M}_{\text{gir}} = -I_1 \cdot \vec{\Omega} \times \vec{\omega}$$

Essa propriedade dos giroscópios, de alinharem o eixo de rotação com o eixo do movimento de arrastamento, é utilizada para determinar a direção do norte verdadeiro.

#### Exercício de aplicação:

Para reforçarmos os conceitos durante a aplicação do teorema do momento angular, consideremos o seguinte problema: Um cilindro de raio  $R$  e massa  $m$  rola sem escorregar sobre um plano horizontal; sabendo-se que o centro de massa do cilindro está a uma distância  $e$  do seu centro geométrico, pede-se determinar a equação diferencial que rege o movimento do cilindro, bem como as reações no ponto de contacto.

A figura ilustra a geometria do problema. Note-se que para valores positivos de  $d\theta/dt$  a velocidade do centro de massa é para a esquerda e para cima.



- $\vec{i}$  - versor na direção horizontal
- $\vec{j}$  - versor na direção vertical
- $\vec{r}$  - raio vetor posição absoluta do elemento de massa
- $\vec{p}$  - raio vetor posição do elemento de massa em relação ao polo de momento

O equacionamento do problema pode ser feito, tanto através da conservação de energia, quanto pela aplicação dos teoremas do movimento do baricentro (T.M.B.) e do momento angular (T.M.A.). Como desejamos também determinar as reações no ponto de contato, vamos utilizar o T.M.B. e o T.M.A..

Para iniciar a discussão, lembremos que no equacionamento

teórico obtivemos duas equações gerais para o T.M.A., a saber, equ. (23) e (25). A primeira delas, apesar de aparentemente mais simples, normalmente traz dificuldades no cálculo do momento angular. A segunda equação simplifica esse cálculo, principalmente no caso de sólidos.

Os possíveis polos de momento para a solução do problema em questão são: o centro de massa C; o ponto de contato A; e o centro do cilindro O. No que segue, vamos aplicar o T.M.A. em relação a cada um deles, considerando as equações (23) e/ou (25).

Como primeira escolha tomemos o ponto de contato A, uma vez que as reações (incógnitas extras) não entram no equacionamento, simplificando a álgebra da solução. Adicionalmente, enfoquemos nossa atenção ao ponto A se deslocando sobre o plano, ao mesmo tempo em que seu contraparte se desloca sobre a superfície do cilindro. Neste caso, o T.M.A. fica:

$$\frac{d\vec{H}_A}{dt} = \vec{M}_A + m \cdot \vec{v}_C \times \vec{v}_A \quad (23) \quad \text{onde:}$$

$$\vec{H}_A = \int \vec{\rho} \times \vec{v} \cdot dm = \int \vec{\rho} \times (\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot dm = \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot dm$$

$$\vec{H}_A = \left[ I_C + m \cdot \left[ (e \cdot \sin\theta)^2 + (R - e \cdot \cos\theta)^2 \right] \right] \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v}_C = -(R - e \cdot \cos\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{i} + e \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v}_A = -R \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{i} \quad \text{e} \quad \vec{M}_A = -m \cdot g \cdot e \cdot \sin\theta \cdot \vec{k} \quad (42)$$

Substituindo os vários termos na equação do T.M.A., vem:

$$\frac{d\vec{H}_A}{dt} = \left[ \left[ I_C + m \cdot e^2 + m \cdot R^2 - 2 \cdot m \cdot R \cdot e \cdot \cos\theta \right] \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot m \cdot R \cdot e \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 \right] \cdot \vec{k}$$

$$\left[ I_C + m \cdot (e^2 + R^2) - 2 \cdot m \cdot R \cdot e \cdot \cos\theta \right] \cdot \ddot{\theta} + m \cdot R \cdot e \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot e \cdot \sin\theta = 0 \quad (43)$$

Deve-se notar que o momento de inércia em relação a A varia de instante a instante.

Vamos aplicar agora a equação do T.M.A. em relação ao ponto do cilindro que coincide com o centro instantâneo de rotação no momento dado. Notemos que esse ponto tem como trajetória uma cicloide, e que no instante considerado está justamente no seu ponto de mínimo. Nestas condições, em que o polo de momento pertence ao corpo, podemos aplicar a equação (25) sem maiores

dificuldades. Neste caso, vem:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_{A_{rel}} = \vec{M}_A + m \cdot \vec{v}_A \times \vec{\rho}_C \quad (25) \quad \text{onde:}$$

$$\vec{H}_{A_{rel}} = \left[ I_C + m \cdot (e^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot e \cdot \cos\theta) \right] \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{k} \quad \vec{v}_A = \vec{0}$$

$$\vec{v}_A = \dot{\theta}^2 \cdot R \cdot \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{\rho}_C = e \cdot \text{sen}\theta \cdot \vec{i} + (R - e \cdot \cos\theta) \cdot \vec{j}$$

Como o ponto  $\bar{A}$  pertence ao cilindro, o momento de inércia em relação a ele é fixo e portanto:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_{A_{rel}} = \left[ I_C + m \cdot (e^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot e \cdot \cos\theta) \right] \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{k}$$

e a equação diferencial do movimento se torna:

$$\left[ I_C + m \cdot (e^2 + R^2) - 2 \cdot m \cdot R \cdot e \cdot \cos\theta \right] \cdot \ddot{\theta} + m \cdot R \cdot e \cdot \text{sen}\theta \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot e \cdot \text{sen}\theta = 0$$

que é idêntica à equação (43).

Consideremos, a seguir, o centro geométrico do cilindro  $O$  como polo de momento. Note-se que o ponto pertence ao cilindro, e que a equação (25) do T.M.A. é mais adequada. Neste caso:

$$\vec{H}_O = \left[ I_C + m \cdot e^2 \right] \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{k} \quad \vec{v}_O = -R \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{i} \quad \vec{v}_O = -R \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{i}$$

$$(C - O) = \vec{\rho}_C = -e \cdot \text{sen}\theta \cdot \vec{i} - e \cdot \cos\theta \cdot \vec{j}$$

$$\vec{M}_O = T \cdot R \cdot \vec{k} - m \cdot g \cdot e \cdot \text{sen}\theta \cdot \vec{k}$$

Aplicando o T.M.B. na direção horizontal, vem:

$$m \cdot \frac{d}{dt} \left[ -(R - e \cdot \cos\theta) \cdot \dot{\theta} \right] = T = m \cdot (-R + e \cdot \cos\theta) \cdot \ddot{\theta} - m \cdot e \cdot \text{sen}\theta \cdot \dot{\theta}^2$$

Substituindo na equação (25), vem:

$$(I_C + m \cdot e^2) \cdot \ddot{\theta} = -m \cdot R^2 \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot m \cdot R \cdot e \cdot \cos\theta \cdot \ddot{\theta} - m \cdot \frac{R}{e} \cdot \text{sen}\theta \cdot \dot{\theta}^2 - m \cdot g \cdot e \cdot \text{sen}\theta$$

que coincide com a equação diferencial obtida anteriormente.

Tomando o centro de massa como polo de momento, a equação do T.M.A. fica:

$$\frac{d}{dt} \vec{H}_c = \vec{M}_c \quad \text{com} \quad \vec{H}_c = I_c \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{k}$$

$$e \quad \vec{M}_c = T \cdot (R - e \cdot \cos\theta) \cdot \vec{k} - N \cdot e \cdot \sin\theta \cdot \vec{k}$$

Aplicando o T.M.B. vem:

$$m \cdot \frac{d}{dt} \left[ -(R - e \cdot \cos\theta) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{i} + e \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{j} \right] = T \cdot \vec{i} + (N - m \cdot g) \cdot \vec{j}$$

Portanto:

$$T = -m \cdot (R - e \cdot \cos\theta) \cdot \ddot{\theta} - m \cdot e \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 \quad (44)$$

$$N = m \cdot g + m \cdot e \cdot \sin\theta \cdot \ddot{\theta} + m \cdot e \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 \quad (45)$$

Substituindo os valores de T e N na equação do momento angular, vem:

$$I_c \cdot \ddot{\theta} = -m \cdot (R - e \cdot \cos\theta)^2 \cdot \ddot{\theta} - m \cdot (R - e \cdot \cos\theta) \cdot e \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 - m \cdot g \cdot e \cdot \sin\theta + \\ -m \cdot (e \cdot \sin\theta)^2 \cdot \ddot{\theta} - m \cdot e^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2$$

Portanto, a mesma equação obtida anteriormente:

$$\left[ I_c + m \cdot (e^2 + R^2) - 2 \cdot m \cdot R \cdot e \cdot \cos\theta \right] \cdot \ddot{\theta} + m \cdot R \cdot e \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot e \cdot \sin\theta = 0$$

Para finalizar lembremos que, como o sistema é conservativo, a equação diferencial do movimento pode ser integrada de modo a eliminar as derivadas segundas. Neste caso obtemos:

$$\left[ I_c + m \cdot (e^2 + R^2) - 2 \cdot m \cdot R \cdot e \cdot \cos\theta \right] \cdot \frac{\dot{\theta}^2}{2} - m \cdot g \cdot e \cdot \cos\theta = Cte \quad (46)$$

As reações no contato podem ser calculadas a partir das equações (44) e (45).