

# Exercício 4.26 – PME3330

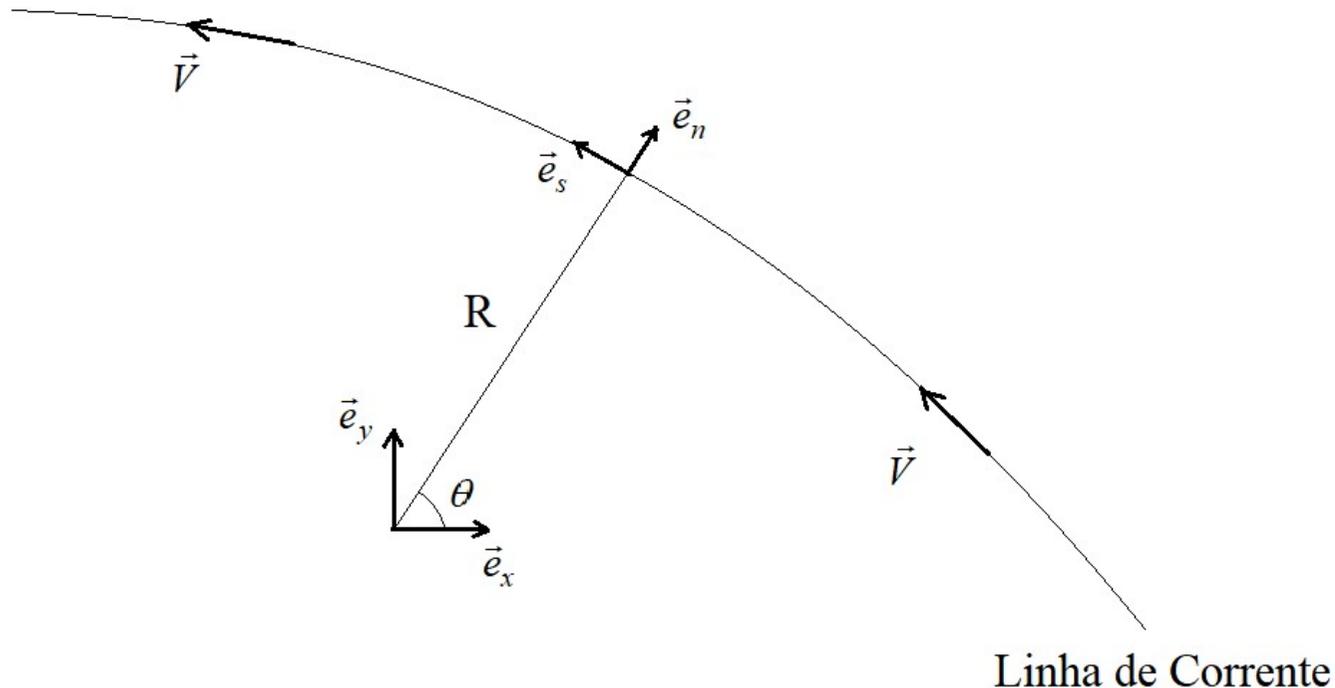
Equações de Euler e Bernoulli

## Exercício 4.26

Coordenadas Curvilíneas, ou de linha decorrente, estão definidas na figura, onde  $n$  é a direção normal à linha de corrente em um ponto,  $s$  é a direção tangencial e  $R$  é o raio de curvatura nesse ponto. Mostre que a equação de Euler fica:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g_s \qquad -V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{V^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g_n$$

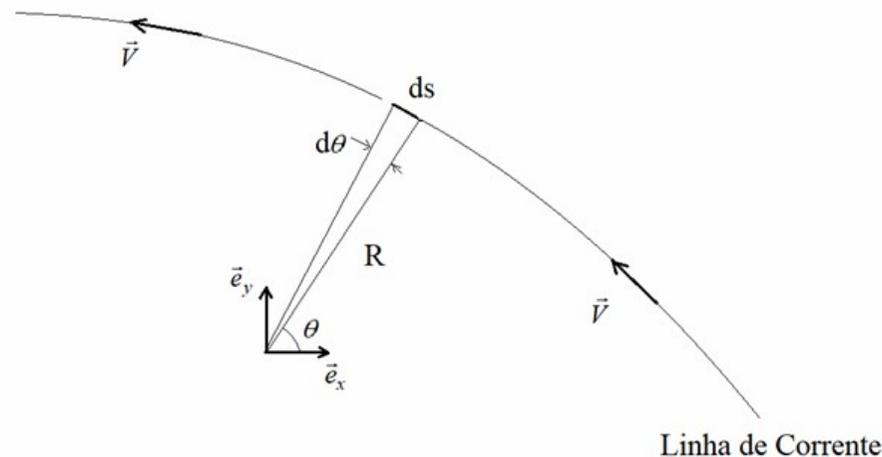
Mostre também que a integral da primeira equação é a equação de Bernoulli.



## Exercício 4.26

Um sistema de coordenadas orientado de acordo com o vetor da velocidade é chamado de Sistema Intrínseco de Coordenadas. Dado o raio de curvatura em um ponto da linha de corrente, podemos construir os versores  $\vec{e}_n$  e  $\vec{e}_s$  de uma forma similar à usada para construir um sistema cilíndrico de coordenadas, como visto em aula. Temos que:

$$\vec{e}_n = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad \vec{e}_s = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$



Também cumpre lembrar que um elemento  $ds$  correspondente a um elemento infinitesimal da linha de corrente é dado por:

$$ds = R d\theta$$

## Exercício 4.26

Mas, voltando ao assunto de interesse, a equação de Euler:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$$

Cumpra lembrar que o vetor da velocidade, pela própria definição de um Sistema Intrínseco de Coordenadas, é dado por:

$$\vec{V} = V \vec{e}_s$$

Assim, a aceleração fica:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{\partial (V \vec{e}_s)}{\partial t} + \left( V \frac{\partial}{\partial s} \right) V \vec{e}_s = \frac{\partial V}{\partial t} \vec{e}_s + V \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \vec{e}_s + V^2 \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} \quad (\text{I})$$

Cabe ver aqui que o versor  $\vec{e}_s$  varia ao longo da direção tangente  $s$  da linha de corrente devido à mudança de direção do vetor da velocidade, e varia com o tempo em um ponto fixo da linha de corrente se o escoamento for não-permanente. Assim, é preciso descobrir suas derivadas.

## Exercício 4.26

Voltando à definição dos versores  $\vec{e}_s$  e  $\vec{e}_n$ , temos que:

$$\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} = \frac{\partial}{R \partial \theta} \left( -\operatorname{sen} \theta \vec{e}_x + \operatorname{cos} \theta \vec{e}_y \right) = \frac{-\operatorname{cos} \theta \vec{e}_x - \operatorname{sen} \theta \vec{e}_y}{R} = -\frac{\vec{e}_n}{R}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial t} = \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\vec{e}_n \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Substituindo essas expressões na expressão (I) da aceleração:

$$\vec{a} = \frac{\partial V}{\partial t} \vec{e}_s + V \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \vec{e}_s + V^2 \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \right) \vec{e}_s + \left( -V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{V^2}{R} \right) \vec{e}_n$$

## Exercício 4.26

Assim, obtivemos expressões para a aceleração normal e tangencial:

$$a_s = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \quad a_n = -V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{V^2}{R}$$

Lembrando que a equação de Euler é:

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$$

Resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g_s \quad -V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{V^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g_n$$

## Exercício 4.26

Falta a segunda parte do exercício, que é demonstrar que:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g_s \quad (\text{II})$$

Resulta na equação de Bernoulli.

Para tanto, vamos usar a idéia, explicada em aula, que a aceleração da gravidade deriva de um potencial:

$$\vec{g} = \nabla(-gz)$$

Onde  $z$  é uma conta vertical. A componente  $g_s$  da aceleração da gravidade será dada por:

$$g_s = \vec{g} \cdot \vec{e}_s = \nabla(-gz) \cdot \vec{e}_s = \frac{\partial(-gz)}{\partial s}$$

Fizemos uso, acima, do conceito de derivada direcional.

## Exercício 4.26

Voltando agora para a expressão (II) e lembrando que, se o escoamento for permanente:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Se o escoamento for permanente e incompressível, uma partícula se translada ao longo da linha de corrente com massa específica constante:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\rho} \right)$$

E, do cálculo:

$$V \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2} \right)$$

## Exercício 4.26

Com os resultados anteriores, a equação (II):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g_s$$

Resulta, para escoamento permanente e incompressível:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0$$

Ou seja,

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante sobre uma linha de corrente}$$

## Exercício 4.26

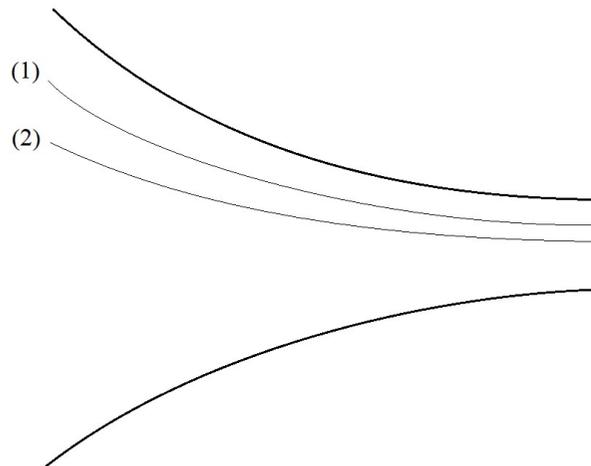
O exercício é muito teórico, mas os resultados servem para explicar uma série de questões importantes do ponto de vista da engenharia. Primeiramente, ignorando a gravidade e considerando escoamento permanente, imaginemos duas linhas de corrente, (1) e (2), submetidas ao mesmo gradiente de pressão  $\partial p/\partial s$ . Da equação de Euler na direção tangencial, teremos:

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial s} = V_2 \frac{\partial V_2}{\partial s}$$

Se tivermos uma contração, e a linha de corrente (1) apresentar uma velocidade maior que a linha de corrente (2):

$$V_1 > V_2 \Rightarrow \frac{\partial V_1}{\partial s} < \frac{\partial V_2}{\partial s}$$

Assim, a variação de velocidade sobre a linha de corrente (1) será menor que sobre a linha de corrente (2), ou seja, na saída da contração as velocidades tendem a se uniformizar.



## Exercício 4.26

Isso ajuda a explicar porque, em túneis de vento, antes da seção de testes temos uma contração. Ela ajuda a termos um perfil de velocidades uniforme na seção de testes.

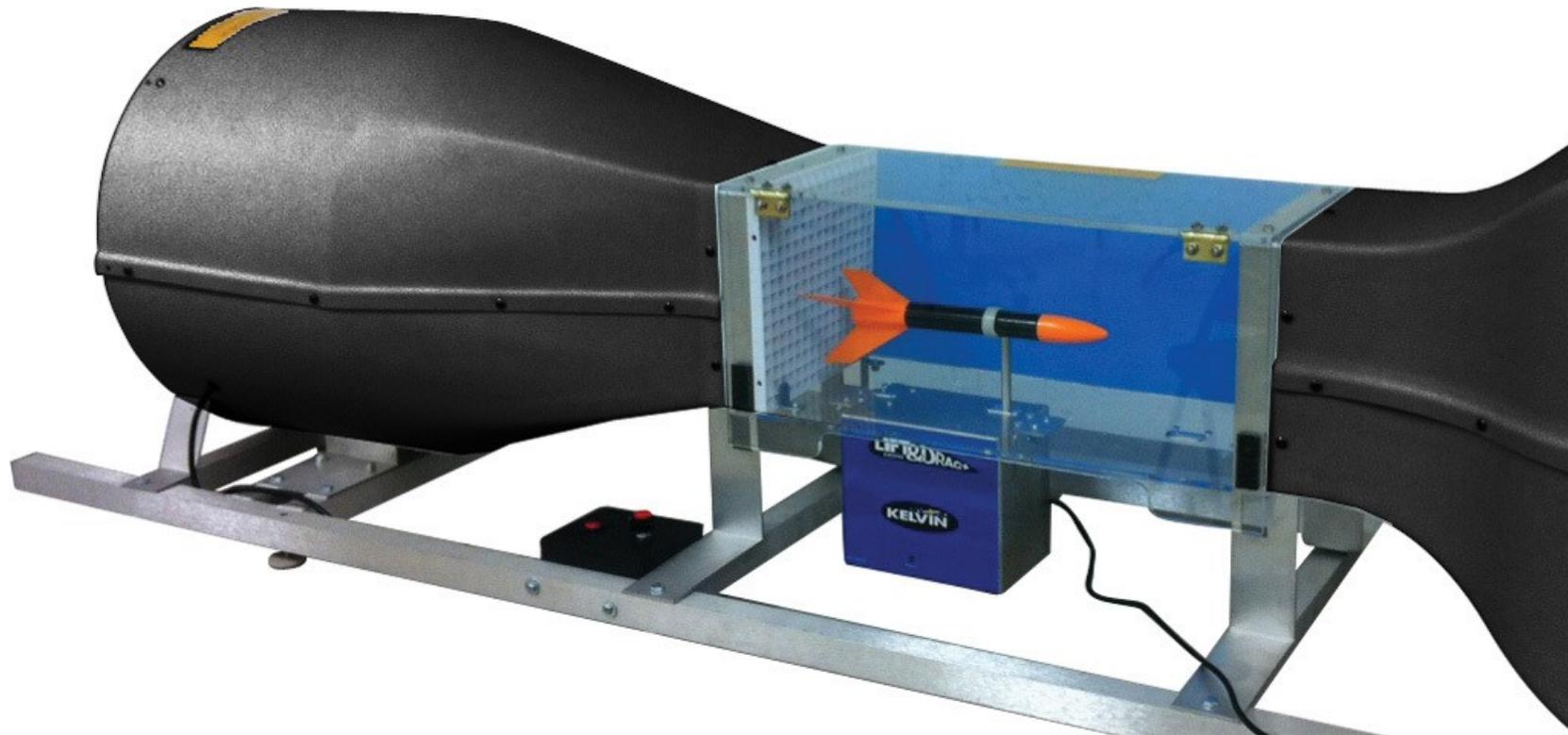


Figura extraída de <https://kelvin.com/kelvin-kel-wind-3-wind-tunnel/>. Túnel de vento educacional da KELVIN EDUCATIONAL.

## Exercício 4.26

Outro aspecto importante está relacionado com o efeito da curvatura das linhas de corrente sobre o perfil de pressões. Novamente, se ignorarmos a gravidade e considerarmos regime permanente, a equação de Euler na direção normal fica:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{R}$$

Isso significa que a curvatura das linhas de corrente interfere no gradiente de pressão, aumentando a pressão “para o lado de fora da curva”. Assim, medidas de pressão que visam uma obtenção de uma pressão média em uma seção devem ser realizadas em regiões onde as linhas de corrente sejam retilíneas, e um sensor de pressão não pode perturbar as linhas de corrente.

