7600054 — Sistemas Complexos

Gonzalo Travieso

2020-03-25

Outline

Revisão

- Espaço de estado
- Trajetórias
- Ergodicidade
- Equações de recorrência e mapas
- Pontos fixos
- Estabilidade

Atratores

- Um atrator é uma região limitada no espaço de estado para a qual trajetórias partindo de certas condições iniciais são atraídas.
- O atrator não precisa ser atingido pelas trajetórias, mas elas precisam chegar arbitrariamente próximas do atrator.
- Um ponto fixo estável é um tipo de atrator.

Bacia de atração

- Apesar de um atrator capturar órbitas suficientemente próximas, ele não necessariamente captura órbitas partindo de todo o espaço de estado.
- A região do espaço de estado na qual, se o sistema se encontra nessa região ele será atraído para um dado atrator, é denominada a bacia de atração (*basin of attraction*) do atrator.

Ciclo limite

- Um outro tipo de atrator é o ciclo limite.
- Um ciclo limite é um atrator periódico.
- Se $\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}$ está no ciclo limite, então

$$\mathbf{x}_{t+T} = \mathbf{f}^T(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{x}},$$

  para algum T.
- T é denominado o período do ciclo.
- Os pontos que fazem parte de um ciclo limite são denominados pontos periódicos de período T.

Ciclo limite (cont)

- Note que
$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^T(\hat{\mathbf{x}}),$$
e portanto os pontos periódicos de período T do mapa $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ são pontos fixos do mapa $\mathbf{f}^T(\mathbf{x})$.
- Portanto cada ciclo limite de período T de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ corresponde a T pontos fixos de $\mathbf{f}^T(\mathbf{x})$.

Ciclo limite (cont)

- Por exemplo, para $T = 2$, se $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são os pontos no ciclo de período 2 de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, então

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{x}^{(2)}$$

e

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(2)}) = \mathbf{x}^{(1)}.$$

- Portanto

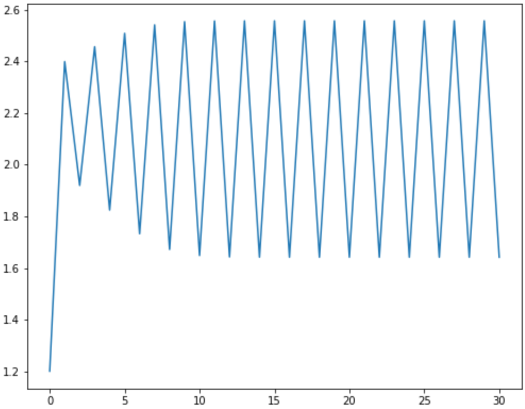
$$\mathbf{f}^2(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(2)}) = \mathbf{x}^{(1)}$$

e

$$\mathbf{f}^2(\mathbf{x}^{(2)}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(2)})) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{x}^{(2)}.$$

Exemplo

Vejamos o que acontece com o mapa 2, com $\mu = 2.2$ e $x_0 = 1.2$:



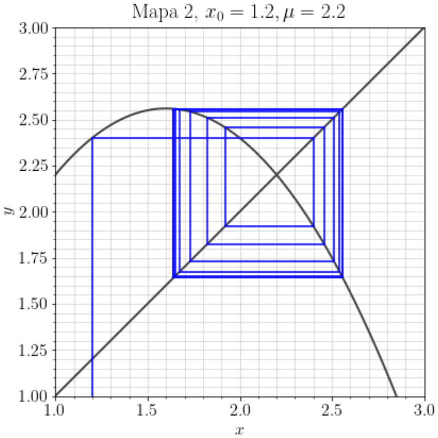
Exercício

Exercício

Verifique a trajetória do mapa 2 com $\mu = 2.5$ e $\mu = 3$ e compare esses resultados com o da figura anterior (plot os três na mesma figura).

Gráfico de teia de aranha

Para acompanhar melhor o que acontece, vejamos agora o gráfico de teia de aranha:



Encontrando os ciclos limite

- Como vimos, se existe um ciclo limite de período T do mapa $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, então os pontos nesse ciclo são pontos fixos de $\mathbf{f}^T(\mathbf{x})$.
- Podemos então procurar os ciclos de uma dada periodicidade T do mapa $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ através da busca de pontos fixos de $\mathbf{f}^T(\mathbf{x})$.
- Infelizmente esse processo só é viável para baixos valores de T.

Exemplo

- Vamos encontrar o(s) ciclo(s) de período 2 do mapa 2.
- O mapa é $f(x) = x(1+\mu-x)$.
- Portanto, $f^2(x) = f(f(x)) = f(x)(1-f(x))$, o que resulta em:

$$f^2(x) = x(1+\mu-x)(1+\mu-x(1+\mu-x)).$$

- Os pontos fixos são então as soluções da equação:

$$x(1+\mu-x)(1+\mu-x(1+\mu-x)) - x = 0.$$

Exemplo (cont)

- Esta é uma equação de quarto grau, mas felizmente já conhecemos duas de suas raízes, pois se $x^* = f(x^*)$ então $x^* = f(f(x^*)) = f^2(x^*)$.
- Portanto $x = 0$ e $x = \mu$ são raízes dessa equação.
- Como sabemos, se $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ e $x^{(4)}$ são as 4 raízes de uma equação de quarto grau, então a equação pode ser escrita

  $$(x - x^{(1)})(x - x^{(2)})(x - x^{(3)})(x - x^{(4)}) = 0$$

  e se conhecemos duas dessas raízes, podemos dividir a expressão da esquerda pelos correspondentes fatores $(x - x^{(i)})$ para simplificá-la.

Exemplo (cont)

- Dividindo por x encontramos

$$(1+\mu-x)(1+\mu-x(1+\mu-x))-1=0.$$

- Para eliminar o fator $(x-\mu)$ podemos colocar:

$$(1+\mu-x)(1+\mu-x(1+\mu-x))-1=(x-\mu)(a+bx-x^2),$$

e expandimos ambos os lados em potências de x.

- Expandindo o lado esquerdo temos:

$$2\mu(1+\mu)-(1+\mu)(2+\mu)x+2(1+\mu)x^2-x^3.$$

- Expandindo o lado direito temos:

$$-\mu a+(a-\mu b)x+(b+\mu)x^2-x^3.$$

- Igualando os termos constantes encontrams $a=-(2+\mu)$
- Igualando os termos em x^2 encontrams $b=2+\mu$.

Exemplo (cont)

- Portanto, os dois pontos fixos restantes são as soluções da equação de segundo grau:
$$x^2 - (\mu + 2)x + (\mu + 2) = 0.$$
- As suas raízes são:
$$\frac{1}{2}\left(\mu + 2 \pm \sqrt{\mu^2 - 4}\right).$$
- Como há apenas dois novos pontos fixos, ambos fazem parte do mesmo ciclo de período 2 de $f(x)$, e portanto este é o único ciclo de período dois (dado um valor de μ) para o mapa 2.

Exercício

Verifique que as interações do mapa 2 para $\mu = 2.2$ e $x_0 = 1.2$ realmente convergem para um ciclo com os dois pontos fixos encontrados.

Exercício

Considerando o mapa 1:

$$f(x) = \mu + x(1 - x).$$

Exercício

1. Calcule os novos pontos fixos de $f^2(x)$ para o mapa 1.
2. Verifique analiticamente que esses pontos formam um ciclo de período 2 do mapa 1 (basta substituir seus valores em $f(x)$).
3. Execute numericamente a interação com valores de μ de 1.2 e 1.4 e verifique se as interações convergem para esse ciclo limite.
4. Para o caso de $\mu = 5$, quais seriam os pontos no ciclo de período 2 do mapa 1?
5. Execute numericamente para $\mu = 5$ partindo de um ponto próximo desse ciclo e veja o que ocorre.

Estabilidade

- Da mesma forma que os pontos fixos, os ciclos limite podem ser estáveis ou instáveis.
- Eles serão estáveis se, dada uma trajetória próxima desse ciclo, ela será atraída para esse ciclo.
- Podemos determinar a estabilidade de um ciclo limite de período T simplesmente analisando a estabilidade de um correspondente ponto fixo de $f^T(x)$. Se o ponto fixo de $f^T(x)$ for estável, então o correspondente ciclo limite de $f(x)$ será estável.
- Só precisamos analisar um dos T pontos do ciclo (lembre-se que todos são pontos fixos de $f^T(x)$).

Exemplo

- Para saber se o ciclo limite de período dois do mapa 2 é estável, devemos verificar a estabilidade de um dos pontos fixos de $f^2(x)$.
- Para isso, calculamos a derivada em relação a x:

$$\frac{df^2}{dx} = (2x - \mu - 1)(2x^2 - 2(\mu + 1)x + \mu + 1).$$

- Substituindo x por qualquer um dos novos pontos fixos resulta em:

$$\left.\frac{df^2}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}\left(\mu+2\pm\sqrt{\mu^2-4}\right)} = 5 - \mu^2.$$

Exemplo (cont)

- Para garantir estabilidade do ciclo, a derivada deve ser menor que um em valor absoluto:
$$|5-\mu^2|<1.$$
- Isto resulta em:
$$2<|\mu|<\sqrt{6}.$$
- Os pontos fixos do mapa 2 original continuam pontos fixos de $f^2(x)$, apesar de que degenerados (os dois pontos no ciclo são idênticos), e as suas condições de estabilidade também são mantidas.
- No caso de $x=0$, a condição de estabilidade é $-2<\mu<0$, e portanto ele não é estável quando existem ciclos de período 2 não triviais.
- O mesmo acontece com $x=\mu$, cuja condição de estabilidade é $0<\mu<2$, também incompatível com ciclos não triviais.
- Note que, assim que os pontos fixos anteriores ficam instáveis é que surge um ciclo de período 2 estável. Vamos voltar a este ponto mais tarde.

Exercício

Considerando o mapa 1:

$$f(x) = \mu + x(1 - x).$$

Exercício

Encontre a condição de estabilidade para o ciclo limite de período 2 desse mapa.

Estabilidade de Lyapunov

Um ponto fixo $x^* = f(x^*)$ é estável na definição de Lyapunov se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que

$$\|x - x^*\| < \delta \Rightarrow \|f^t(x) - x^*\| < \epsilon$$

para todo $t > 0$.
O ponto fixo é assintóticamente estável se ele é estável por essa definição e também se existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t->\infty} f^t(x) = x^*.$$

Para um ponto periódico de período T $\hat{x}$, sua estabilidade é determinada pela estabilidade de $f^T(x)$ em $\hat{x}$.

Superestabilidade

Um ponto fixo $x^* = f(x^*)$ é superestável ou crítico se

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^*} = 0.$$

O mesmo se aplica para ciclos limite de período T, analisando a característica do ponto fixo de f^T.