**MAT 1513 – LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA**
**1º SEMESTRE DE 2020**
**PROFª. DANIELA**

**SEMANA 23/03 A 27/03**

**AULA 2 – RESPOSTAS A PERGUNTAS DE COLEGAS**

**Dúvida 1**

*Bom dia, professora!*

*O item E de um exercício passado em sala, sobre conjuntos de filósofos, matemáticos, cientistas e professores, dizia 'se um filósofo não é matemático, ele é professor'. Uma das respostas dadas foi* ***F 'está contido em' M 'união' P*** *e eu fiquei sem entender muito bem. Será que a senhora poderia me ajudar?*

*Agradeço desde já,*

**Resposta**

Vamos chamar de *F* o conjunto de todos os Filósofos, *M* o conjunto de todos os Matemáticos e de *P* o conjunto de todos os professores.

Temos que escrever a afirmação *'se um filósofo não é matemático, ele é professor'* por meio de uma sentença de conjuntos. Uma das respostas aceitas foi $F \subset M \cup P$ .

Tomando um elemento de F, ou seja, um filósofo, ele pode ou não ser matemático.

→ Se ele **é** matemático, então **ele pertence a M.**
→ Se ele **não é** matemático, segue da afirmação dada que ele deve ser professor, isto é, **ele pertence a P.**

Ou seja, dado um elemento de F, ele pertence a M ou ele pertence a P, isto é ele pertence a $M \cup P$ .

Consequentemente, F está contido em $M \cup P$ .

**Dúvida 2**

*Boa noite, professora! Minha dúvida é em relação ao último exercício da aula 1, eu tenho uma dificuldade muito grande em provar as coisas, no caso, demonstrar se as igualdades entre os conjuntos são verdadeiras ou não. Como eu posso mostrar isso no exercício em questão e melhorar essa dificuldade no geral?*

*Grata desde já.*

**Resposta**

Antes de mais nada, preciso fazer uma **correção** no enunciado desse exercício. O conjunto $B$ também deve ser um subconjunto de $X$ e não de $Y$. Peço desculpas!

Então vamos ao enunciado correto e à solução do exercício.

Seja $f: X \to Y$ uma função, e sejam $A$ e $B$ subconjuntos de $X$. Decida se é V ou F:

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

**A primeira igualdade é verdadeira.**

**Lembrem-se: para provar que dois conjuntos X e Y são iguais, temos que provar duas coisas: que X está contido em Y e que y está contido em X.**

Vamos provar a inclusão $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Seja $y \in f(A \cup B)$. Então $y = f(x)$, onde $x \in A \cup B$. Então $x \in A$ ou $x \in B$

→ Se $x \in A$ então $y = f(x) \in f(A)$.

→ Se $x \in B$ então $y = f(x) \in f(B)$.

Logo $y \in f(A) \cup f(B)$

Agora, vamos provar a inclusão oposta: $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

Seja $y \in f(A) \cup f(B)$. Então $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$.

→ Se $y \in f(A)$ então $y = f(x)$ onde $x \in A$. Logo $x \in A \cup B$ e portanto $y \in f(A \cup B)$.

→ Se $y \in f(B)$ então $y = f(x)$ onde $x \in B$. Logo $x \in A \cup B$ e portanto $y \in f(A \cup B)$.

Logo, em ambos os casos, $y \in f(A \cup B)$

**A segunda igual é falsa!**

**Vamos tentando fazer igual à primeira parte, até ver onde é que dá o problema.**

Vamos tentar provar a primeira inclusão: $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ .

Seja $y\in f(A\cap B)$ . Então $y=f(x)$ , onde $x\in A\cap B$ . Então $x\in A$ e $x\in B$ .

→ Como $x\in A$ temos que $y\in f(A)$ . E como $x$ também pertence a $B$ , temos que $y$ também pertence a $f(B)$ . Ou seja $y\in f(A)$ e $y\in f(B)$ e portanto $y$ pertence à intersecção $f(A)\cap f(B)$ .

**Concluímos portanto que a primeira inclusão é verdadeira! O problema deve estar na inclusão oposta!**

Vamos tentar provar a inclusão oposta: $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$ .

Seja $y\in f(A)\cap f(B)$ . Então $y\in f(A)$ e $y\in f(B)$ .

→ Como $y\in f(A)$ temos que existe $x\in A$ tal que $y=f(x)$ .

→ Como $y\in f(B)$ temos que existe $x'\in A$ tal que $y=f(x')$ .

**→ É aqui que está o problema.** Os valores $x$ e $x'$ que obtemos acima não precisam ser os mesmos! Nada nos garante que o $x$ que pertence a $A$ é o mesmo que pertence a $B$ . Por isso, não podemos garantir que $x\in A\cap B$ , nem que $x'\in A\cap B$ .

Explicando melhor: dada uma função qualquer, pode acontecer que $x$ e $x'$ sejam valores diferentes, mesmo que aconteça $f(x)=f(x')$ . Um exemplo bem simples: $f(x)=x^2$ , $x=2$ e $x'=-2$ .

Então o problema está na inclusão $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$ . Aparentemente ela é falsa em geral.

**Aqui, é muito importante destacar um comentário:** da maneira que estamos tentando provar a inclusão, notamos que há um problema que nos impede de prosseguir com os argumentos. Isso significa que a estratégia adotada não funciona. Aqui temos duas opções a seguir: ou tentamos outra estratégia (se achamos que a inclusão é de fato verdadeira, mas que estamos com uma estratégia ruim) ou partimos para provar que a inclusão é falsa! Aqui vai da intuição de cada um, da maturidade de cada aluno ou aluna, da bagagem e ferramentas que cada um tem, que com o tempo vai-se adquirindo na universidade...

Minha intuição é que a inclusão é falsa. Par isso, vou dar um exemplo concreto para provar isso. Vou usar o mesmo exemplo acima.

→ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2$ .
→ *A = [-1,0]* (o intervalo fechado com extremos -1 e 0)
→ *B = [0,1]* (o intervalo fechado com extremos 0 e 1)

→ $A \cap B = \{0\}$ . Logo $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$ .

→ Por outro lado: *f(A) = [0,1]* e *f(B) = [0,1]*. Logo *f(A) ∩ f(B) = [0,1]*

Vejam: $f(A \cap B) = \{0\}$ e *f(A) ∩ f(B) = [0,1]*. Conjuntos diferentes!

Portanto esses conjuntos, **em geral**, não são iguais.

**Para pensar...** Que condições podemos impor sobre a função *f* para que a igualdade seja verdadeira? Que propriedades sobre funções estudamos na Aula 1, e que a função *f* desse exemplo não possui?

***Dúvida 3***

*Boa Tarde, professora Daniela!*

*Eu tenho algumas dúvidas da aula 2, já peço perdão por enviar só agora, eu não sabia por onde tinha que enviar as dúvidas e acabei deixando de lado, mas vi que a senhora respondeu algumas. Caso não vá mais responder dessa aula, tudo bem!*

***1)*** *Quando estava lendo a parte de Cardinalidade de conjuntos na matéria que você enviou, me surgiu uma dúvida a respeito da parte que diz:*

*Se um conjunto (qualquer) possui 4 elementos, é porque existe uma bijeção entre ele e o conjunto {1, 2,3, 4}*

*Não existe possibilidade alguma de essa cardinalidade não ser função? Ou de existir dois conjuntos com mesmo número de elementos que possuam uma função que não seja bijetora?*

***2)*** *Na pergunta:*

*Você consegue definir uma bijeção entre ℕe o conjunto dos números naturais ímpares? E uma bijeção entre ℕ={1, 2,3, ...} e ℤ={... ,−3,−2,−1, 0,1, 2, 3,...} ?*

*Eu posso pensar em um subconjunto para fazer essa questão?*

*Exemplo, pegando um conjunto P dos números primos, que estão contidos nos Naturais, e fazendo P→ℕ, temos uma bijeção, certo?*

*Desde já, obrigada!*

*Obrigada também por estar disponibilizando os materiais de maneira tão didática e se disponibilizando para nossas dúvidas!*

**Resposta**

**1)** A cardinalidade de um conjunto não é uma função. No caso do conjunto {1, 2,3, 4} sua cardinalidade é **4**, que é a quantidade de elementos desse conjunto. E dado qualquer conjunto com 4 elementos, por exemplo: A={ ⅓ , ⅔, ⅕, ⅖ } ou ainda B={▪, ◊, ○, □}, sempre existe uma bijeção entre cada um deles e o conjunto {1, 2,3, 4}. Pois todos possuem 4 elementos.

Por enquanto vou me ater somente a conjuntos finitos. Então acredito que já respondi a sua primeira pergunta.

Com relação à sua segunda pergunta, se pode existir uma função entre dois conjuntos com o mesmo número de elementos que não seja bijetora. Claro que pode. Por exemplo: A={-1, 0, 1, 2} e B={0, 1, 2, 4} e $f(x)=x^2$ . Temos que $f : A \to B$ , note que f(A) = { 0, 1, 4} que **está contido** em B. O conjunto B é o **contradomínio** da função f, e não a **imagem** da função f.

Agora, se temos uma função f entre dois conjuntos **finitos** A e B, com mesma quantidade de elementos, de tal forma que **todo** elemento de B é imagem, pela função f, de **apenas um** elemento de A, então essa função f é obrigatoriamente injetora.

**2)** Com relação à sua pergunta de querer fazer uma bijeção entre o conjunto dos números primos P e o conjunto dos números naturais, para então fazer uma bijeção entre N e Z, eu acho que seria dar muita volta, além de incluir uma dificuldade a mais no problema. Pois não existe uma "fórmula geral para um número primo", que dependa de um número natural *n.* Perceba que todo número par pode ser escrito como *2n*, isso é, temos uma fórmula para qualquer par, dependendo de um natural *n.* Minha sugestão é que não precisa passar pelos primos para fazer o exercício, isso inclusive vai dificultar muito a solução. Tente pensar em uma fórmula que associe, a cada natural *n*, um número ÍMPAR e, para a outra pergunta, tente pensar em uma fórmula que associe, a cada natural *n*, um número INTEIRO. Se um número par é da forma *2n*, como será que é a forma de um número ímpar?

**Dúvida 4**

*Olá, professora. Tudo bem? Boa tarde!*

*Estava resolvendo a lista de exercícios que você publicou e tive uma dúvida: se dois conjuntos são tais que $X \neq Y$, é necessariamente verdade que NENHUM dos elementos de X são iguais aos de Y?*

*Agradeço desde já!*

**Resposta**

Não é **necessariamente** verdade. Para $X \neq Y$, a única coisa que podemos dizer é que:

→ existe algum x em X que não está em Y
ou
→ existe algum y em Y que não está em X

Exemplos de conjuntos $X \neq Y$:

- X={1, 2, 3} e Y={1, 2, 3, 4}
  Todos os elementos de X estão em Y, mas tem elemento em Y que não está em X.

- X={1, 2, 3, 4} e Y={3, 4, 5, 6}
  Existem elementos de X que não estão em Y, e existem elementos de Y que não estão em X.

- X={1, 2, 3, 4} e Y={1, 2, 3}
  Todos os elementos de Y estão em X, mas tem elemento em X que não está em Y.

- X={1, 2, 3, 4} e Y={5, 6, 7, 8}
  Nenhum elemento de X é elemento de Y.

Note que o que você falou é **apenas um** dos casos para dois conjuntos serem diferentes.

**Dúvida 5**

*Boa noite, prof!*

*Espero que esteja tudo bem, e a salvo desse vírus.*

*O motivo do meu e-mail é uma dúvida que talvez pareça simples, mas acabei empacando:*

*Qual a diferença de um conjunto X = Y, ou X estar contido em Y?*

*Pelo que entendi, se X = Y todos os elementos de X são também os de Y, e se X está contido em Y, todos os elementos de X estão em Y, mas isso não quer dizer que obrigatoriamente os de Y sejam também os mesmos de X, certo?*

*Desde já agradeço!*

**Resposta**

Qual a diferença entre **X=Y** e **X contido em Y**?

**X=Y** significa "todo elemento de X pertence a Y **e** todo elemento de Y pertence a X"

Ou seja...

**X=Y** significa **X contido em Y e Y contido em X.**

Já **X contido em Y** significa somente a primeira das condições acima.

Por exemplo:

X={1, 2, 3} e Y={1, 2, 3, 4}.

Todo elemento de X é um elemento de Y. Então **X está contido em Y.**

Mas **Y não está contido em X**, já que existem um elemento de Y, o 4, que não pertence a X.

Nesse exemplo temos:

**X está contido em Y**
**e**
**X≠Y**