

AULA 6

(c) Evolução Temporal para $H = H(t)$

Vimos que quando H depende do tempo o operador de evolução temporal $U(t, t_0) \neq U(t - t_0)$ mas obedece

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0) \quad (1a)$$

$$\text{com } U(t, t) = \mathbb{1} \quad (1b)$$

então $U(t, t_0) \neq e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt'}$ pois $[H(t), H(t')] \neq 0$ (em geral)

Existe no entanto uma expansão formal muito útil, entretanto não existe, em geral, uma forma fechada para a solução de (1a): a chamada expansão ou série de Dyson.

Vamos supor que $U(t, t_0)$ possa ser descrito por uma série em potências de $H(t)$ série co!

$$U(t, t_0) = U_0(t, t_0) + U_1(t, t_0) + \dots + U_n(t, t_0) + \dots \quad (2)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (U_0(t, t_0) + U_1(t, t_0) + \dots) = H(t) (U_0(t, t_0) + U_1(t, t_0) + \dots) \quad (3)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_0(t, t_0) = 0 \quad (3a) \text{ não depende de } t$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_1(t, t_0) = H(t) U_0(t, t_0) \quad (3b)$$

(4)

$$i\hbar \frac{\partial U_n(t, t_0)}{\partial t} = H(t) U_{n-1}(t, t_0) \quad (3c)$$

mas $U(t_0, t_0) = \mathbb{1} \Rightarrow U_0(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ c/ $U_1(t_0, t_0) = U_2 = \dots = U_n = 0$

$$\Rightarrow U(t, t_0) = \mathbb{1} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} U_n(t, t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') U_{n-1}(t', t_0) \\ &= \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' H(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' H(t'') U_{n-2}(t'', t_0) \\ &= \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} H(t') H(t'') \dots H(t^{(n)}) \quad (4b) \end{aligned}$$

ordenado temporalmente!

Assim usando (2), (4a) e (4b)

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt' \dots \int_{t_0}^{t^{(n)}} dt^{(n)} H(t') H(t'') \dots H(t^{(n)}) \quad (5)$$

série de Dyson

Podemos ainda definir o chamado ~~produto~~ ^{operador} de ordenação temporal (time ordering operator): T-product, muito útil para escrever (5) de forma compacta.

$$T(A(t) B(t')) = \begin{cases} A(t) B(t') & \text{se } t \geq t' \\ B(t') A(t) & \text{se } t' > t \end{cases}$$

então

$$T \left[\int_{t_0}^t dt' H(t') \right]^2 = T \left[\int_{t_0}^t dt' H(t') \int_{t_0}^t dt'' H(t'') \right]$$

$$= \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' T[H(t') H(t'')]$$

$$= \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H(t') H(t'') + \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t''} dt' H(t'') H(t')$$

$$= 2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H(t') H(t'')$$

$$T \left[\int_{t_0}^t dt' H(t') \right]^n = n! \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n)}} dt^{(n)} H(t') \dots H(t^{(n)}) \quad (6)$$

$$\therefore U_n(t, t_0) = \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} T \left[\int_{t_0}^t dt' H(t') \right]^n \quad (7)$$

Série de Dyson (forma compacta)

$$U(t, t_0) = T' \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \left[\int_{t_0}^t dt' H(t') \right]^n \right\}$$

$$\equiv T \exp \frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \quad (8)$$

IV - Propagadores e Função de Green

A Equação de Schrödinger pode ser transformada em uma equação integral.

Para a equação dependente do tempo o kernel da equação integral é chamado de PROPAGADOR, enquanto que para a equação independente do tempo é chamado de FUNÇÃO DE GREEN.

(a) Propagadores

$$|\psi; t\rangle = U(t, t_0) |\psi; t_0\rangle$$

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right] U(t, t_0) = 0$$

$|\vec{r}\rangle \equiv |\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N\rangle$
auto-estados simultâneos
de todos os operadores de coordenada.

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}; t) \equiv \langle \vec{r} | \psi(\vec{r}, t) \rangle &= \int d\vec{r}' \langle \vec{r} | U(t, t_0) | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \psi; t_0 \rangle \\ &= \int d\vec{r}' \langle \vec{r} | U(t, t_0) | \vec{r}' \rangle \psi(\vec{r}', t_0) \quad (1) \end{aligned}$$

(4)

usamos $\int d\vec{r}' = \int d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 \dots d\vec{r}'_N = \int d^3r'_1 \dots \int d^3r'_N$

A equação (1) move os estados para frente e para trás no tempo. Uma equação que só evolui para frente pode ser obtida se introduzimos o propagador K

$$K(\vec{r}t, \vec{r}'t') \equiv \langle \vec{r}t | \vec{r}'t' \rangle \equiv \langle \vec{r} | U(t, t') | \vec{r}' \rangle \theta(t - t') \quad (2)$$

onde $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$

$$U(t, t') \xrightarrow{t \rightarrow t'} 1 \quad \therefore \boxed{\lim_{t \rightarrow t'} K(\vec{r}t, \vec{r}'t') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \quad (3)$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') \equiv \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}'_1) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}'_2) \dots \delta(\vec{r}_N - \vec{r}'_N)$$

Dada a nossa definição fica claro que o propagador é uma amplitude de probabilidade de encontrar o sistema em algum ponto $\vec{r} \equiv (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ no espaço de configurações no tempo t , dado que ele estava originalmente em $\vec{r}' \equiv (\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N)$ em t'

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t K(\vec{r}t, \vec{r}'t') &= \langle \vec{r} | i\hbar \partial_t U(t, t') | \vec{r}' \rangle \theta(t - t') \\ &+ i\hbar \langle \vec{r} | U(t, t') | \vec{r}' \rangle \delta(t - t') \\ &= \langle \vec{r} | H(t) U(t, t') | \vec{r}' \rangle \theta(t - t') + \langle \vec{r} | U(t, t') | \vec{r}' \rangle i\hbar \delta(t - t') \end{aligned} \quad (5)$$

$$= H(t) K(\vec{r}t, \vec{r}'t') + \langle \vec{r} | U(t, t') | \vec{r}' \rangle i\hbar \delta(t-t')$$

$$\boxed{[i\hbar \partial_t - H(t)] K(\vec{r}t, \vec{r}'t') = i\hbar \delta(t-t') \delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad (4)}$$

A propriedade de grupo $U(t_3, t_2) U(t_2, t_1) = U(t_3, t_1)$ leva à seguinte regra de composição para propagadores

$$K(\vec{r}t, \vec{r}'t') = \int d\vec{r}'' K(\vec{r}t, \vec{r}''t'') K(\vec{r}''t'', \vec{r}'t') \quad (5)$$

(Mostre!)

(b) Função de Green

Para H independente do tempo $U(t-t') = e^{-\frac{iH(t-t')}{\hbar}}$

$$\boxed{K(\vec{r}, \vec{r}', t) = \langle \vec{r} | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | \vec{r}' \rangle \theta(t) \quad (6)}$$

Sejam $\{ \psi_{nv}(\vec{r}) \}$ um conjunto completo de autofunções de H com energia E_n e v auto-valores adicionais
relação de completude $\sum_{n,v} |\psi_{nv}\rangle \langle \psi_{nv}| = 1$ $\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$ base ortogonal

$$\sum_{n,v} \langle \vec{r} | \psi_{nv} \rangle \langle \psi_{nv} | \vec{r}' \rangle = \sum_{n,v} \psi_{nv}(\vec{r}) \psi_{nv}^*(\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

Assim

$$K(\vec{r}, \vec{r}', t) = \langle \vec{r} | \sum_{n,v} |\psi_{nv}\rangle \langle \psi_{nv}| e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} | \vec{r}' \rangle \theta(t)$$

$$= \theta(t) \sum_{n,v} \psi_{nv}(\vec{r}) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \psi_{nv}^*(\vec{r}') \quad (7)$$

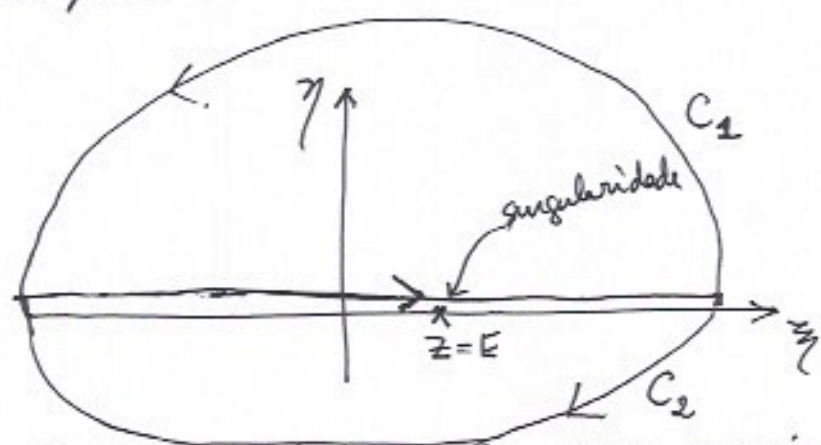
(6)

$\Rightarrow$ o propagador para H independente do tempo é uma série de Fourier no tempo com espectro de frequência $\{ \omega_n = E_n/\hbar \}$

Considere a função analítica definida por

$$f(E) = \int_C dz \frac{e^{-izt/\hbar}}{z-E} \quad (8) \quad \begin{aligned} E &\in \mathbb{R} \\ z &= \xi + i\eta \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

o contorno C vai de $-\infty < \xi < \infty$ ao longo do eixo real, há um polo em $z=E$



$$\begin{aligned} e(z) &= e^{-izt/\hbar} \\ &= e^{-i\xi t/\hbar} e^{\eta t/\hbar} \end{aligned}$$

* se $t < 0$, $e(z) \rightarrow 0$ no semi-plano superior e após fecharmos o contorno não há singularidades (C_1) $\Rightarrow$ a integral (8) é nula

* se $t > 0$, $e(z) \rightarrow 0$ no semi-plano inferior e após fecharmos o contorno (C_2) esse contém a singularidade em $z=E$. Nesse caso a integral (8) leva a

$$f(E) = -2\pi i e^{-iEt/\hbar} \Theta(t) \quad (9)$$

Assim

$$K(\vec{r}, \vec{r}'; t) = \frac{i}{2\pi} \int_C dz e^{-izt/\hbar} \sum_{nv} \frac{\psi_{nv}(\vec{r}) \psi_{nv}^*(\vec{r}')}{z - E_n} \quad (10)$$

Definimos agora a função de Green da Equação de Schrödinger independente do tempo como sendo o integrando desse integral de Fourier p/ $z = E + i\varepsilon$

$$G(\vec{r}, \vec{r}', E) = \sum_{nv} \frac{\psi_{nv}(\vec{r}) \psi_{nv}^*(\vec{r}')}{E - E_n + i\varepsilon} \quad (11) \quad \varepsilon > 0 \text{ infinitesimal}$$

$$(E - H) G(\vec{r}, \vec{r}', E) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

a função de Green tem polos simples nos autovalores de H com resíduos $\sum_{nv} \psi_{nv}(\vec{r}) \psi_{nv}^*(\vec{r}')$

PROVA: Eq. (4) p/ H ind. do tempo

$$(i\hbar \partial_t - H) K(\vec{r}, \vec{r}', t) = i\hbar \delta(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$(i\hbar \partial_t - H) \frac{i}{2\pi} \int_C dE e^{-iEt/\hbar} G(\vec{r}, \vec{r}', E) = i\hbar \delta(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$i\hbar \frac{i}{2\pi} \int_C dE \cdot \frac{-iE}{\hbar} e^{-iEt/\hbar} G(\vec{r}, \vec{r}', E) - H \frac{i}{2\pi\hbar} \int_C dE e^{-iEt/\hbar} G(\vec{r}, \vec{r}', E) = i\hbar \delta(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_C dE e^{-iEt/\hbar} (E - H) G(\vec{r}, \vec{r}', E) = \delta(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

(8)

Propagador e Função de Green de uma Partícula Livre (Um exemplo)

Considere o caso em que H é o Hamiltoniano que descreve um sistema de partículas livres, isto é, é uma soma de termos que comutam, V é um produto de termos para cada partícula e para cada componente do momento. É certamente suficiente avaliar K para uma única partícula movendo-se em 1D pois a generalização para N partículas em 3D é imediata

$$K(x, x', t) = \langle x | e^{-i \frac{\hat{p}^2}{2m} \frac{t}{\hbar}} | x' \rangle \theta(t)$$

a descrição deve ser invariante por translação espacial
 $\Rightarrow K$ só pode depender da diferença $x - x'$.

Tomemos $x' = 0$.

$$K(x, t) = \theta(t) \int_{-\infty}^{+\infty} dp \langle x | p \rangle \langle p | e^{-i \frac{\hat{p}^2}{2m} \frac{t}{\hbar}} | 0 \rangle$$

$$= \theta(t) \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{e^{i x p / \hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i \frac{p^2}{2m} \frac{t}{\hbar}} \langle p | 0 \rangle$$

$$= \theta(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{i \left(\frac{x p}{\hbar} - \frac{p^2 t}{2m\hbar} \right)}$$

Podemos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(ax^2+bx)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{i|a|}} e^{-ib^2/4a} & a < 0 \\ \sqrt{\frac{\pi i}{a}} e^{-ib^2/4a} & a > 0 \end{cases}$$

$$\therefore K(x,t) = \theta(t) \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{\pi}{i} \frac{2m\hbar}{t}} e^{+i \frac{x^2}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{4t} 2m\hbar}$$

$$a = -\frac{1}{2m\hbar} < 0 \quad b = \frac{x}{\hbar}$$

$$K(x,t) = \theta(t) \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{i \frac{x^2 m}{2\hbar t}}$$

para N partículas em 3D

$$K(\vec{r},t) = \theta(t) \left(\frac{1}{2\pi i \hbar t} \right)^{3N/2} \prod_{n=1}^N (m_n)^{3/2} \exp\left(\frac{i r_n^2 m_n}{2\hbar t}\right)$$

Outra maneira: usando Eqs de Heisenberg.

Cuidado! Em geral as Eqs de Heisenberg não podem ser resolvidas como clássicas por causa do problema de ordenamento!!

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \dot{\hat{x}}(t) = \frac{\hat{p}(t)}{m}$$

$$\frac{d\hat{p}(t)}{dt} = \dot{\hat{p}}(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{p}(t) = \hat{p}(0)} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \frac{\hat{p}(0)}{m} t}$$

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{p}(t), \hat{x}(t)] = \frac{i}{\hbar} [\hat{p}(0), \hat{x}(0)] = 1$$

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \frac{\hat{p}}{m} t + \hat{x}(0) \\ \hat{x}(t') = \frac{\hat{p}}{m} t' + \hat{x}(0) \end{cases} \quad \hat{p} = \hat{p}(t) = \hat{p}(0)$$

não comuta

$$\boxed{\hat{x}(t') = \hat{x}(t) + \frac{\hat{p}}{m} (t' - t)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{x}(t), \hat{x}(t')] &\neq 0 \\ [\hat{p}(t), \hat{p}(t')] &= 0 \end{aligned}}$$

Note: $\langle x't' | \hat{p} | xt \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \langle x't' | xt \rangle$
 $= -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \langle x't' | xt \rangle$

lembre: $\langle x' | \hat{p} | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \psi(x') = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \psi \rangle$

$$\therefore \boxed{\langle x' | \hat{p} \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' |}$$

analogamente

$$\langle x' | \hat{p} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \hat{p} | x' \rangle = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \langle \psi | x' \rangle$$

$$\therefore \boxed{\hat{p} | x' \rangle \equiv -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'} | x' \rangle} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle x't' | x t \rangle = 0$$

$$\frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x} \right) K(x't', x t) = 0$$

$$\therefore K(x't', x t) = K(x' - x, t', t)$$

consequência de invariância por translação (p é constante no tempo!)

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle \quad \text{em } t=0$$

$$U^\dagger(t, 0) \hat{x} U(t, 0) U^\dagger(t, 0) |x\rangle = x U_{(t,0)}^\dagger |x\rangle$$

$$\hat{x}_H(t) |x; t\rangle_H = x |x; t\rangle_H$$

$$\langle x't' | \hat{x}(t) | x t \rangle = x(t) \langle x't' | x t \rangle$$

$$= \langle x't' | \hat{x}(t') | x t \rangle - \frac{(t' - t)}{m} \langle x't' | \hat{p} | x t \rangle$$

$$= x' \langle x't' | x t \rangle + \frac{(t' - t)}{m} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \langle x't' | x t \rangle$$

$$(x - x') K(x' - x, t, t') = \frac{\hbar}{i} \frac{(t' - t)}{m} \frac{\partial}{\partial x} K(x' - x; t, t')$$

$$y = x' - x$$

$$-y K(y; t, t') = -\frac{\hbar}{i} \frac{(t' - t)}{m} \frac{\partial}{\partial y} K(y; t, t')$$

$$K(y, t, t') = f(t, t') e^{\frac{i m y^2}{2 \hbar (t' - t)}}$$

Note que : $\langle x' t' | H | x t \rangle = i \hbar \frac{\partial}{\partial t'} \langle x' t' | x t \rangle$
 $= -i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x' t' | x t \rangle$

lembre-se que

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t'} \langle q | \psi(t') \rangle = \langle q | H | \psi(t') \rangle$$

$$\therefore i \hbar \frac{\partial}{\partial t'} \langle q t' | \equiv \langle q t' | H \Rightarrow -i \hbar \frac{\partial}{\partial t} | q t' \rangle \equiv H | q t' \rangle$$

então

$$\therefore i \hbar \left(\frac{\partial}{\partial t'} \langle x' t' | x t \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle x' t' | x t \rangle \right) = 0$$

$\langle x' t' | x t \rangle$ é função de $t' - t$. Invariância por translação temporal ($H(t') = H(t) = H(0) = \text{const}$)

$$\langle x' t' | x t \rangle = K(x' - x, t' - t) = K(y, t' - t)$$

$$= f(t' - t) e^{\frac{i m y^2}{2 \hbar (t' - t)}}$$

$$\langle x' t' | H | x t \rangle = \langle x' t' | \frac{\hat{p}^2}{2m} | x t \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \langle x' t' | x t \rangle$$

$$= i \hbar \frac{\partial}{\partial t'} \langle x' t' | x t \rangle = i \hbar \frac{\partial}{\partial t'} \left[f(t' - t) e^{\frac{i m y^2}{2 \hbar (t' - t)}} \right]$$

$$i\hbar \left[f' - \frac{im y^2}{2\hbar(t'-t)^2} f \right] = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{-im f}{\hbar(t'-t)} + \frac{f m^2 y^2}{\hbar^2(t'-t)^2} \right]$$

$\div f$

$$\frac{f'}{f} - \frac{im y^2}{2\hbar(t'-t)^2} = \frac{-1}{2(t'-t)} - \frac{i m y^2}{2\hbar(t'-t)^2}$$

$$\frac{d}{dt} \ln f(t'-t) = \frac{-1}{2(t'-t)}$$

$$\ln f(t'-t) = -\frac{1}{2} \ln |t'-t| + \text{const}$$

$$f(t'-t) = \frac{A}{\sqrt{|t'-t|}}$$

$$K(y, t'-t) = \frac{A}{|t'-t|^{1/2}} e^{\frac{im y^2}{2\hbar(t'-t)}}$$

mas

$$\int dx \langle x't' | x t \rangle \langle x t | x'' t'' \rangle = \langle x't' | x'' t'' \rangle \propto A$$

$\propto A^2$

podemos determinar A comparando essas 2 expressões
podemos determinar A também por condições de contorno

$$\lim_{t' \rightarrow t} K(y, t', t) = \delta(x' - x) = \delta(y)$$

$$K(y, z) = \frac{A}{|z|^{1/2}} e^{\frac{imy^2}{2\hbar z}} = \delta(y); \quad z \rightarrow 0_+$$

fazendo uma transformada de Fourier de ambos os lados

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{2\pi\hbar} e^{iky/\hbar} \frac{A}{|z|^{1/2}} e^{\frac{imy^2}{2\hbar z}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{2\pi\hbar} e^{\frac{iky}{\hbar}} \delta(y) = \frac{1}{2\pi\hbar}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{iky/\hbar} \frac{A}{|z|^{1/2}} e^{\frac{imy^2}{2\hbar z}} = 1 \quad y' = \sqrt{\frac{m}{2\hbar z}} y$$

$$dy' = \sqrt{\frac{m}{2\hbar z}} dy$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \sqrt{\frac{2\hbar z}{m}} \frac{A}{|z|^{1/2}} e^{i\sqrt{\frac{2\hbar z}{m}} \frac{k}{\hbar} y'} e^{iy'^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \sqrt{\frac{2\hbar}{m}} A e^{iy'^2} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m}} A \sqrt{i\pi} = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\hbar i\pi}}$$

$$\therefore \langle x't' | xt \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i |t'-t|}} e^{\frac{im(x'-x)^2}{2\hbar(t'-t)}} \theta(t'-t)$$