Lista 2

Álgebra 1 para licenciatura

MAT0120

Entrega: 29/03/2020

Exercício 1 *Sejam A e B dois conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente. Mostre que o número de funções de A em B é n^m. (Sugestão: Indução em n.)*

Exercício 2 *Encontre uma fórmula fechada para a soma*

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \tag{1}$$

Prove que a fórmula encontrada é igual a (1) para todo n pertencente a $\mathbb{N}$.

Exercício 3 *Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:*

a. $9 | 10^n - 1$;

b. $3 | 10^n - 7^n$;

c. $8 | 3^{2n} - 1$;

d. $6 | 5^{2n+1} + 1$;

e. $5 | n^5 - n$;

Exercício 4 *a. Mostre que a é par $\Leftrightarrow$ a^2 é par.*

b. Mostre que não existem a e b inteiros, não nulos, tais que $a^2 = 2b^2$. (Essa questão será melhor respondida no futuro.).

Exercício 5 *Seja a seguinte sequência:*

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3$$

Prove os seguintes resultados:

a. $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n},\ n \geq 1$;

b. $F_{n+m} = F_{n-1} \cdot F_m + F_n \cdot F_{m+1},\ n \geq 2,\ m \geq 1$;

c. $F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^n,\ n\ \geq 1.$

Exercício 6 *Sejam $p_1, p_2, \cdots, p_k$ inteiros positivos, $p_i > 1$. Se $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$, então para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq k$ vale que $p_i \nmid n$.*

Exercício 7 *Seja $P = \{a \in \mathbb{Z} : a > 0\}$. Prove que:*

a. $(a \in P, b \in P) \Rightarrow (a + b \in P)$;

b. $(a \in P, b \in P) \Rightarrow (a \cdot b \in P)$;

c. *Para todo inteiro vale uma das seguintes afirmações:*

$$a = 0, \quad a \in P, \quad -a \in P$$

Exercício 8 *Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função tal que:*

1. $f(1) = 1$;

2. $f(a + b) = f(a) + f(b)$, *para quaisquer a e b em $\mathbb{Z}$.*

Prove que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.