Capítulo 1

Sistemas contínuos

Até o momento estudamos sistemas formados por um número finito de corpos discretos. Existem problemas que podem ser mais facilmente tratados como se fossem contínuos, como uma corda, uma membrana elástica, o movimento de fluídos, a dinâmica de campos eletromagnéticos, a propagação do som, entre muitos outros. Neste capítulos vamos generalizar os formalismos de Lagrange e de Hamilton para sistemas contínuos.

1.1 Lagrangeana de sistemas contínuos

Para os sistemas discretos, vistos até agora, a Lagrangeana é dada por

$$L = \sum_i T_i - V_i \,, \tag{1.1}$$

onde o índice $i = 1, 2, 3, \ldots$ indica a i-ésima partícula do sistema. Essa abordagem é válida para sistemas discretos, onde cada um dos componentes, as partículas, podem ser individualizadas e contadas. Existem, porém sistemas em que isso não é possível ou não é apropriado, como por exemplo, no estudo da eletrodinâmica, quando campos elétricos e magnéticos interagem entre si. Oras, campos são definidos no contínuo, isto é, em cada ponto do espaço, e portanto não podemos contar o número de componentes, e portanto não podemos definir o número de graus de liberdade, da mesma forma como vínhamos fazendo.

Para resolver esse problema, notemos que os campos são determinados como uma função contínua do espaço e do tempo, isto é, um campo escalar ϕ é uma função do tipo $\phi = \phi(\boldsymbol{r}, t)$. Em termos de coordenadas generalizadas, podemos escrever $\phi = \phi(q, t)$, onde $q = q_1, q_2, \ldots, q_n$. Podemos entender o significado físico da função ϕ ou $\dot{\phi}$ d seguinte forma: um sistema discreto mas com grande número de partículas numa região finita do espaço de fase, portanto com alta densidade de partículas, pode ser caracterisado não por cada uma das partículas individualmente, mas por conjuntos de partículas cujos momentos e coordenadas generalizados se encontram numa vizinhança do ponto (x_i, p_i), de modo que a energia potencial seja dados pela densidade de partículas, $\phi(x_i, p_i)$, com momentos e coordenadas numa vizinhança infintesimal desse ponto do espaço de fase.

A Lagrangeana, então, passa a ser determinada em função do campo em cada ponto. Se aproximássemos o espaço contínuo por uma rede discreta, teríamos

$$L = \sum_{i \in l} T(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) - V(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) \,, \tag{1.2}$$

sendo i um ponto da rede l, que tem as mesmas dimensões do espaço em que o sistema está imerso.

Para fazermos a passagem para o contínuo, fazemos a seguinte transformação:

$$\sum_{i \in l} \to \int d^3 r \,, \tag{1.3}$$

onde a soma sobre todos os pontos da rede é substituída pela integração sobre todo o espaço. Um elemento de volume $dV = d^3 r$ contribui para a Lagrangeana total com um valor

$$dL = \mathcal{L} d^3 r \,, \tag{1.4}$$

onde $\mathcal{L}$ é uma função densidade chamada densidade Lagrangeana. Dessa forma teremos

$$L = \int d^3 r \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) \,, \tag{1.5}$$

com

$$\mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) = T(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) - (\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) \,. \tag{1.6}$$

Com isso, a ação, que é a grandeza minimizada no Princípio de Hamilton, fica

$$S = \int \int \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) d^3 r dt \,. \tag{1.7}$$

Podemos escrever, ainda, de forma a tratar tempo e espaço de modo simétrico, como

$$S = \int \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{r}_i, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{r}_i, t)) d^4 x \,, \tag{1.8}$$

sendo $x = x_1, x_2, x_3, t$.

1.2 Equações de Lagrange para sistemas contínuos

Para obter as equações de Lagrange, aplicamos o princípio de Hamilton, minimizando a ação definida na equação (11.7). Para isso, note que

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \sum_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta(\partial_\mu\phi)\,, \tag{1.9}$$

onde o índice $\mu = 1, 2, 3, 4$ indica as 3 coordenadas espaciais e o tempo. O símbolo ∂_μ indica uma derivada parcial na coordenada x_μ, ou seja

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,. \tag{1.10}$$

Portanto temos

$$\delta S = \int d^4x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta(\partial\partial_\mu\phi)\,. \tag{1.11}$$

Aqui estamos usando a notação em que índices repetidos correspondem a

Podemos usar a relação

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\delta(\phi)\,, \tag{1.12}$$

que nada mais é do que uma generalização para mais dimensões da relação já usada na derivação do Princípio de Hamilton, onde tivemos

$$\delta(\dot{\phi}) = \frac{d}{dt}\delta\phi\,. \tag{1.13}$$

Com isto temos que a variação da ação fica

$$\delta S = \int d^4x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \sum_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\partial_\mu\delta(\phi)\,. \tag{1.14}$$

O segundo termo da equação acima pode ser escrito como

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\phi}\partial\partial_\mu\delta(\phi) = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta(\phi)\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right)\delta(\phi)\,, \tag{1.15}$$

e substituíndo este resultado na equação para δS, obtemos

$$\delta S = \int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right)\right]\delta\phi + \int d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta(\phi)\right)\,. \tag{1.16}$$

O último termo do lado direito da equação acima pode ser facilmente integrado, resultando

$$\int d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\phi}\delta(\phi)\right) = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta(\phi)\right]_C\,, \tag{1.17}$$

onde o índice C indica que o termo entre colchetes deve ser calculado na borda C dos limites de integração. Essa borda representa o contorno da região que delimita o sistema espacialmente nos instantes inicial e final. Como no método variacional utilizado para obter as Equações de Lagrange pelo método variacional, aqui também consideramos que nessa borda determinada pelas condições de contorno o campo ϕ não varia, isto é, no contorno C, $\delta\phi = 0$. Com isso temos que o termo considerado aqui é nulo. Assim, a equação para δS fica

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \right] \delta\phi = 0 \,, \tag{1.18}$$

sendo a igualdade com zero resultante da aplicação do Princípio de Mínima Ação de Hamilton.

Esta igualdade deve ser satisfeita para qualquer $\delta\phi$, e isso só é possível se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \,, \tag{1.19}$$

que representam as Equações de Lagrange para sistemas contínuos. Observe que a soma sobre todos os valores do índice μ é subentendida pela regra de repetição de índices.

1.3 Teorema de Noether para sistemas contínuos

Vimos que no caso de sistemas contínuos a Lagrangeana é tal que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Vamos considerar que devido a alguma transformação no espaço e no tempo, ou mesmo no campo ϕ, possa fazer com que o sistema físico permaneça invariante. Isto significa que o caminho no espaço de fase que minimiza a açao permanece o mesmo antes ou depois da transformação.

No caso de sistemas contínuos, como vimos, a densidade Lagrangeana é uma função de campos, e estes dependem das coordenadas e do tempo. Assim, numatransformação das coordenadas temos as seguintes transformações que a acompanham

$$\left\{ \begin{array}{l} x \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi \to \phi' = \phi + \delta\phi \\ \partial_\mu \phi \to \partial_\mu \phi' = \partial_\mu \phi + \delta(\partial\partial_\mu \phi) \,. \end{array} \right. \tag{1.20}$$

Para a densidade Lagrangeana, essa modificação tem dois efeitos: leva o argumento da função de x_μ para x'_μ, mas também leva a própria densidade de $\mathcal{L}(x)$ para $\mathcal{L}'(x')$, já que os campos mudam de ϕ para ϕ'. Dessa forma temos

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(x) + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \,. \tag{1.21}$$

Para variações δx_μ suficientemente pequenas, podemos considerar que

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x^\mu}\delta x^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \,. \tag{1.22}$$

Assim, a equação (11.21) pode ser escrita como

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \,., \tag{1.23}$$

onde somamos e subtraimos o termo $\mathcal{L}(x)$, e onde o termo

$$\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \delta\mathcal{L} \,, \tag{1.24}$$

se refere à variação da densidade Lagrangeana exclusivamente deivdo à vriação do campo ϕ. Esta variação é determinada por

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta(\partial_\mu \phi) \,. \tag{1.25}$$

Usando o fato de que o sistema evolui satisfazendo as Equações de Lagrange, segue que

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta(\partial_\mu \phi) \,, \tag{1.26}$$

portanto

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta\phi \right) \,. \tag{1.27}$$

A variação da ação, S, é

$$\delta S = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int d^4x \mathcal{L}(x) \,, \tag{1.28}$$

e usando o fato de que

$$d^4x' = d^4x(1 + \partial_\mu x^\mu + \dots) \,, \tag{1.29}$$

e usando termos de ordem até primeira ordem, temos que

$$\delta S = \int d^4x \left[\delta\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \mathcal{L}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \right] \,, \tag{1.30}$$

de onde segue que

$$\delta S = \int d^4x \left[\delta\mathcal{L} + \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathcal{L}\delta x^\mu) \right] , \tag{1.31}$$

Se a transformação está relacionada a uma simetria do sistema, isto é, se o sistema é invariante pela transformação utilizada, devemos ter

$$\delta S = 0 \, , \tag{1.32}$$

já que a nova Lagrangeana continua satisfazendo o Princípio de Hamilton. Sustituindo a expressão para $\delta\mathcal{L}$ na equação para δS, temos

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi + \mathcal{L}\delta x^\mu \right) \right] , \tag{1.33}$$

No caso de um campo escalar, temos

$$\delta\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \delta x_\nu \, , \tag{1.34}$$

de modo que obtemos

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi + \mathcal{L}\delta^\mu_\nu \right) \delta x^\nu \right] = 0 \, , \tag{1.35}$$

Isso significa que a grandeza dada por

$$\boldsymbol{J}^\mu_\nu = \mathcal{L}\delta^\mu_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi \tag{1.36}$$

é chamada Corrente de Noether. Em particular,

$$\boldsymbol{J}^0_\nu = \mathcal{L}\delta^0_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \phi} \partial_\nu \phi \tag{1.37}$$

é uma grandeza conservada.

1.3.1 Conservação de energia e momento - tensor momento-energia

Vamos considerar, incialmente, as simetrias que resultam da homogeneidade do tempo e do espaço. Como vimos no caso das simetrias em sistemas discretos, essas simetrias levam à conservação da energia e do momento, respectivamente. Veremos que também no caso contínuo essas grandezas são conservadas.

Podemos tratar simultaneamente as duas simetrias considerando a transformação das 4 coordenas do tipo $x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + a_\mu$, sendo a_μ o deslocamento nas coordenadas espaciais para $\mu = 1, 2, 3$ e no tempo para $\mu = 4$. A variação do campo ϕ, nesse caso, fica

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} a_\nu = \partial^\nu \phi a_\nu \,, \tag{1.38}$$

e para suas derivadas, obtemos

$$\delta\partial_\mu\phi = \frac{\partial\partial_\nu\phi}{\partial x_\nu} a_\nu = (\partial^\mu\partial_\nu\phi) a_\nu \,, \tag{1.39}$$

Com essa variação do campo ϕ, obtemos

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\partial^\nu\phi a_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(\partial^\nu\partial_\mu\phi) a_\nu \,, \,, \tag{1.40}$$

e portanto

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\partial^\nu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(\partial^\nu\partial_\mu\phi)\right] a^\nu \,, \tag{1.41}$$

e podemos reconhecer o termo entre colchetes como

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\partial^\nu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(\partial^\nu\partial_\mu\phi) = \partial_\nu\mathcal{L} \,, \tag{1.42}$$

de onde segue que

$$\delta\mathcal{L} = (\partial^\nu\mathcal{L}) a_\nu \,. \tag{1.43}$$

Agora, usando o fato de que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial^\nu(\partial^\mu\phi) = \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial^\nu\phi\right) - \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\right)\partial^\nu\phi \,, \tag{1.44}$$

podemos escrever a equação (11.40) como

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \left(\partial^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\right)\right]\partial^\nu\phi a_\nu + \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial^\nu\phi a_\nu\right) \,, \tag{1.45}$$

Mas o primeiro termo do lado direito dessa equação representa exatamente as equações de Lagrange dos sistemas contínuos, e durante a evolução do sistema esse termo é nulo, e portanto temos que

$$\delta\mathcal{L} = \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial^\nu\phi a_\nu\right) \,. \tag{1.46}$$

Assim, temos duas equações diferentes para $\delta\mathcal{L}$, a equação (11.43) e a equação (11.46). Subtraindo uma da outra obtemos

$$\left[\partial^\nu \mathcal{L} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi}\partial^\nu \phi\right)\right] a_\nu = 0\,. \tag{1.47}$$

Como

$$\partial^\nu \mathcal{L} = \partial^\mu \mathcal{L}\delta^\nu_\mu\,, \tag{1.48}$$

obtemos

$$\partial^\mu \left[\mathcal{L}\delta^\nu_\mu - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi}\partial^\nu \phi\right) a_\nu\right] = 0\,. \tag{1.49}$$

Assim, o termo

$$\Theta^\nu_\mu = \Lambda^\nu_\mu - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi}\partial^\nu \phi\right) \tag{1.50}$$

com

$$\Lambda^\nu_\mu = \mathcal{L}\delta^\nu_\mu\,. \tag{1.51}$$

Θ^ν_μ é chamado Tensor Energia-Momento, e Θ^ν_0 é uma grandesa conservada. A sua conservação está relacionada à conservação da energia e do momento, em decorrência da isotropia do tempo e do espaço, da mesma forma em que obtivemos essas leis de conservação para o caso de sistemas discretos.

1.3.2 Campos com estrutura interna

As considerações a respeito do Teorema de Noether podem ser generalizadas para sistemas mais complexos do que o campo escalar real, tratado acima.

O primeiro passo é considerar um campo complexo, isto é, $\phi(x) = \phi_R + i\phi_I$, com ϕ_R e ϕ_I reais. Neste caso temos o campo complexo conjugado, ϕ^*. Um exemplo deste caso é a equação de onda de uma partícula de spin inteiro. Neste caso, os campos ϕ_Re ϕ_I são considerados independentes.

Outra possibilidade, bem conhecida, é de campos vetoriais, como o caso do Eletromagnetismo. Aqui, cada campo (elétrico e magnético, contém 3 componentes que, a princípio, são independentes. Finalmente, temos campos tensoriais, que incorporam o conceito de tensores, visto anteriormente.

Vamos estudar aqui como aplicar o formalismo Lagrangeano para estes campos, e estender o Teorema de Noether para estes casos. A aplicação do formalismo de Lagrande é direta, e basta verificar que, sendo cada componente interna do campo independente, teremos uma equação para cada uma das componentes. Assim, a Eq. (11.19) pode ser diretamente generalizada para

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\right) = 0\,, \tag{1.52}$$

com ϕ_i representando cada componente independente do campo.

O campo pode também apresentar outras componentes, tendo uma estrutura vetorial, como ocorre com os campos elétricos e magnéticos, ou tensorial. De um modo geral, sendo $\phi_{i_1 i_2,\ldots,i_p}$ um campo tensorial contravariante, temos que

$$\phi'_{i_1 i_2,\ldots,i_p} = \frac{\partial x'_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial x'_{i_2}}{\partial x_{j_2}} \ldots \frac{\partial x'_{i_p}}{\partial x_{j_p}} \phi_{j_1 j_2,\ldots,j_p} \,. \tag{1.53}$$

Como, até primeira ordem, $x'_i = x_i + \delta x_i$, temos, mantendo termos até primeira ordem,

$$\phi'_{i_1 i_2,\ldots,i_p} = \left(1 + \frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j}\right) \phi_{j_1 j_2,\ldots,j_p} \,, \tag{1.54}$$

e portanto, sendo

$$\Delta\phi = \phi'(x) - \phi(x) \tag{1.55}$$

segue que

$$\Delta\phi_{i_1 i_2,\ldots,i_p} = \left(\frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j}\right) \phi_{j_1 j_2,\ldots,j_p} \,. \tag{1.56}$$

No caso particular de um campo vetorial (tensor de ordem 1), teremos

$$\Delta\phi_i = \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right) \phi_j \,, \tag{1.57}$$

e portanto, até primeira ordem em δx, obtemos

$$\Delta\phi_i = \left(\frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j}\right) \phi_j \,, \tag{1.58}$$

Observe que a variação $\Delta\phi$ não corresponde a toda a variação que se opera no campo tensorial $\phi(x)$ ao se transformar as coordenadas. Isto é evidente da própria definição de $\Delta\phi$, dada na equação (**??**), onde a diferença é tomada no mesmo ponto x. Podemos, então, indicar que uma transformação do sistema de coordenadas $x \to x'(x)$ modifica um campo tensorial de duas formas: uma devido à modificação das coordenadas propriamente ditas, e outra por causa da modificação das componentes do campo. A variação totalé

$$\delta\phi = \phi'(x') - \phi(x) \tag{1.59}$$

pode ser calculada seguindo os mesmos passos já usados para a variação da densidade Lagrangeana, isto é, podemos escrever

$$\phi'(x') = \phi'(x) + \partial^\mu \phi \delta x_\mu \,. \tag{1.60}$$

Subtraíndo o termo $\phi(x)$ em ambos os lados da expressão acima resulta

$$\phi'(x') - \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) + \partial^\mu \phi \delta x_\mu \,, \tag{1.61}$$

e portanto

$$\delta\phi = \Delta\phi + \partial^\mu \phi \delta x_\mu \,. \tag{1.62}$$

e assim obtemos

$$\delta\phi = \left(\frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j}\right) \phi_{j_1 j_2,\ldots,j_p} + \partial^\mu \phi \delta x_\mu \,. \tag{1.63}$$

Por simplicidade, podemos escrever

$$\delta\phi = \chi_i^j \phi_{j_1 j_2,\ldots,j_p} + \partial^\mu \phi \delta x_\mu \,, \tag{1.64}$$

onde

$$\chi_i^j = \left(\frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j}\right) \,. \tag{1.65}$$

Substituindo a expressão (11.64) na equação para a variação da ação, dada pela equação (11.66), temos

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}_{\{j\}} \left(\chi_i^j \phi_{\{j\}} + \partial^\mu \phi_{\{j\}} \delta x_\mu\right) + \mathcal{L} \delta x^\mu\right)\right] = 0 \,, \tag{1.66}$$

A equação acima deixa claro que há dois aspectos que devem ser considerados ao se estudar a invariância da ação de um sistema físico contínuo: o efeito da transformação do sistema de coordenadas; e o efeito da transformação das componentes do campo. Com isso, já podemos ver que se existem transformações do campo que não dependem da transformação de coordenadas, também teremos leis de conservação associadas a essas invariâncias.

1.4 Problemas

1. Considere a densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \dot{\phi}(\boldsymbol{x})^2 - a\phi(\boldsymbol{x})^2 - b\phi(\boldsymbol{x})^4 - c^2 \left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)^2 \,. \tag{1.67}$$

   Obtenha a equação de movimento.

2. Uma corda com densidade linear de massa μ e esticada ao longo do eixo x sofre uma perturbação em sua posição de repouso produzida pro deslocamentos na direção do eixo y, perpendicular ao eixo x. Para pequenas perturbações, a força restauradora sobre um elemento infintesimal da corda, de comprimento dx, é $F = -Y dy$, onde dy é a variação

da posição desse elemento linear de corda na direção y . (a) Determine da densidade Lagrangena, $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(y, \dot{y}, y')$, sendo $y' = dy/dx$. (b) Usando a equação de Lagrange para sistemas contínuos, determine o movimento da corda em função do tempo.

3. A densidade Lagrageana do campo eletromagnético é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi c} F_{kl} F^{kl} \,, \tag{1.68}$$

onde

$$F_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l} \,. \tag{1.69}$$

Determine, usando as equações de Lagrange para sistemas contínuos, as equações de movimento.

4. A densidade Lagrangeana do campo de Kein-Gordon é

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2 \,. \tag{1.70}$$

O momento conjugado é dado por $\pi = \partial_0 \Phi$. (a) Determine a equação de movimento. (b) Determine a densidade Hamiltoniana do sistema. (c) Determine a corrente de Noether correspondente à simetria por invariância do sistema pela transformação $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, onde a^μ é constante.