

# Aula 5

## Mapas de Karnaugh

**SEL 0414 - Sistemas Digitais**

**Prof. Dr. Marcelo Andrade da Costa Vieira**

# 1. Mapa de KARNAUGH ou Mapa K

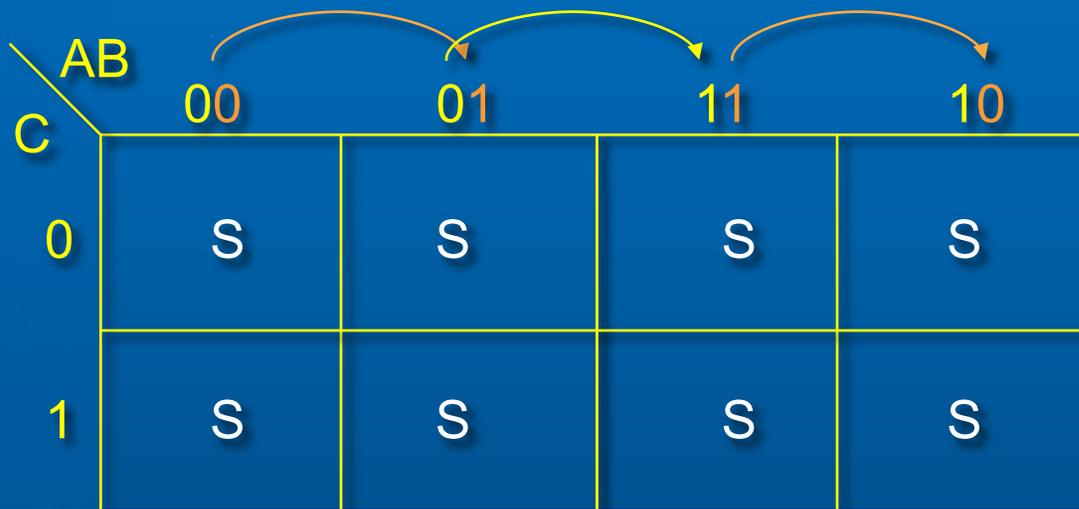
- É uma exposição visual de produtos fundamentais necessários para um solução de uma soma de produtos:

## 1.1. Duas variáveis

		A	
		0	1
B	0	S	S
	1	S	S

# 1. Mapa de KARNAUGH

## 1.2. Três variáveis



A Karnaugh map for three variables (A, B, C). The map is a 2x4 grid. The columns are labeled AB with values 00, 01, 11, and 10. The rows are labeled C with values 0 and 1. All cells contain the letter 'S'. Three curved arrows are drawn above the grid, connecting the columns 00 to 01, 01 to 11, and 11 to 10, indicating a sequence of groupings.

C \ AB	00	01	11	10
0	S	S	S	S
1	S	S	S	S

# 1. Mapa de KARNAUGH

## 1.3. Quatro variáveis

AB \ CD	00	01	11	10
00	S	S	S	S
01	S	S	S	S
11	S	S	S	S
10	S	S	S	S

# Tabela Verdade x Mapa K

Tabela Verdade

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Mapa K

		B	
		0	1
A	0	0	0
	1	1	1

# Mapa de Karnaugh

- Exemplo com três variáveis

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

AB \ C	0	1
00	0	0
01	1	0
11	1	1
10	0	0

# Mapa de Karnaugh

- Exemplo com quatro variáveis

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

# 1. Mapa de KARNAUGH

## Obtenção e Simplificação de expressões por Mapas de Karnaugh

Baseia-se no fato de que  $X + \bar{X} = 1$

**Exemplo:  $S = ABC + AB\bar{C} = AB(C + \bar{C}) = AB$**

A entrada **C** torna-se irrelevante!

# 1. Mapa de KARNAUGH

## Obtenção e Simplificação de expressões por Mapas de Karnaugh

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

A \ B	0	1
0	0	0
1	1	1

$$S = A\bar{B} + AB$$



$$S = A$$

# 1. Mapa de KARNAUGH

## Obtenção da Expressão

- Unir blocos de 1's adjacentes
- Deve-se buscar a formação de blocos com a maior quantidade possível de 1's → respeitada a regra de  $N = 2^n \Leftrightarrow N = \text{quantidade de 1's no bloco}$



Formação de pares, quadras, oitavas,...

- Expressão final = “soma” das expressões de cada bloco

# 1. Mapa de KARNAUGH

## Simplificação

- Usar o menor número de blocos possível;
- Na expressão de cada bloco, **eliminam-se** as variáveis que mudam de estado dentro do bloco;
- As variáveis que não mudam de estado são mantidas na expressão, representando o seu respectivo valor fixo no bloco  $(A = 1 \rightarrow A, A = 0 \rightarrow \bar{A})$

# 1. Mapa de KARNAUGH

## Simplificação

- Quanto maior o bloco, maior o número de variáveis eliminadas e mais simplificada fica a expressão final:
  - **Unidade:** nenhuma variável eliminada;
  - **Par:** uma variável eliminada;
  - **Quadra:** duas variáveis eliminadas;
  - **Oitava:** três variáveis eliminadas;

# 1. Mapa de KARNAUGH

## Agrupamentos

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

		B	
		0	1
A	0	0	0
	1	1	1

$$S = A$$

# 1. Mapa de KARNAUGH

Obtenção e Simplificação de expressões por Mapas de Karnaugh

ABC	S
000	0
001	1
010	0
011	1
100	1
101	1
110	0
111	0

AB \ C	0	1
00	0	1
01	0	1
11	0	0
10	1	1

$$S = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}C$$

# EXEMPLOS

## 1. Pares: uma variável eliminada

AB \ C	0	1
00	1	1
01	1	0
11	0	0
10	0	1

$$S = \bar{A}\bar{C} + C\bar{B}$$

AB \ C	0	1
00	0	1
01	1	0
11	1	1
10	0	0

$$S = \bar{A}\bar{B}C + \bar{C}B + AB$$

# EXEMPLOS

## 2. Quadras: duas variáveis eliminadas

AB \ C	0	1
00	1	0
01	1	0
11	1	0
10	1	0

$$S = \bar{C}$$

AB \ C	0	1
00	1	1
01	0	0
11	0	0
10	1	1

$$S = \bar{B}$$

# EXEMPLOS

## 3. Quadras e Pares

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	1

$$S = \bar{A}D + BD + C\bar{D}\bar{B}$$

# EXEMPLOS

## 4. Quadras: duas variáveis eliminadas

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

$$S = \bar{C}\bar{B}$$

# EXEMPLOS

## 5. Quadras: duas variáveis eliminadas

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	1	1

$$S = \bar{D}\bar{B} + CD$$

# EXEMPLOS

## 6. Oitavas: três variáveis eliminadas

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

$$S = B$$

# EXEMPLOS

## 7. Octetos e Quartetos

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	1	1	1	1

$$S = \bar{B} + \bar{C}D$$

# Exercício 1

- Dada a Tabela Verdade ao lado, ache a equação simplificada de saída utilizando:  
a) Mapa de Karnaugh

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

## Exercício 2

### Obtenção e Simplificação de expressões por Mapas de Karnaugh

ABCD	S
0000	1
0001	1
0010	0
0011	0
0100	0
0101	0
0110	0
0111	0

ABCD	S
1000	1
1001	1
1010	0
1011	0
1100	1
1101	1
1110	0
1111	0



$$S = A\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$$

# Exercício 3

2. Usar o mapa de Karnaugh para simplificar a expressão abaixo:

$$S = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{C}D + A\bar{B}C + \bar{D}$$

↑                    ↑                    ↑                    ↑  
Unidade + Quadra + Par + Oitava

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	1	1

$$S = A\bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$$

# MAPA DE KARNAUGH

## Para mais de 4 variáveis

- Normalmente, não se usa Mapa de Karnaugh para resolução de problemas com mais de 6 variáveis, por ser extremamente difícil sua resolução.
- Entretanto, para até 6 variáveis, o mapa de Karnaugh ainda é muito utilizado.
- Para 5 e 6 variáveis, a forma de representação por Mapa de Karnaugh é feita utilizando a teoria da superposição.

# MAPA DE KARNAUGH

## Para 5 Variáveis

- O mapa final pode ser visualizado como sendo dois mapas de quatro variáveis sobrepostos.
- Um dos mapas, referente a  $E=0$ , corresponde à parte inferior da linha diagonal de divisão das células do mapa final.
- O outro mapa, referente a  $E=1$ , corresponde à parte superior da linha diagonal de divisão das células do mapa final.
- Cada mapa apresenta a sua leitura individual. Se a leitura em um dos mapas for igual (sobreposta) à leitura do outro mapa, estas duas leituras formam uma única leitura.

# MAPA DE KARNAUGH

Para 5 Variáveis

E		AB \ CD		00	01	11	10
		00	01	11	10		
1/0	00						
	01						
	11						
	10						

# MAPA DE KARNAUGH

		CD			
		00	01	11	10
E	AB				
	00	1	1	1	1
1	01	0	0	0	0
	11	0	0	1	0
0	10	1	0	0	0
	00	0	1	0	0

$$S = \bar{A}\bar{B}E + B\bar{C}\bar{E} + ABCD + A\bar{C}D\bar{E} + \bar{B}C\bar{D}E$$

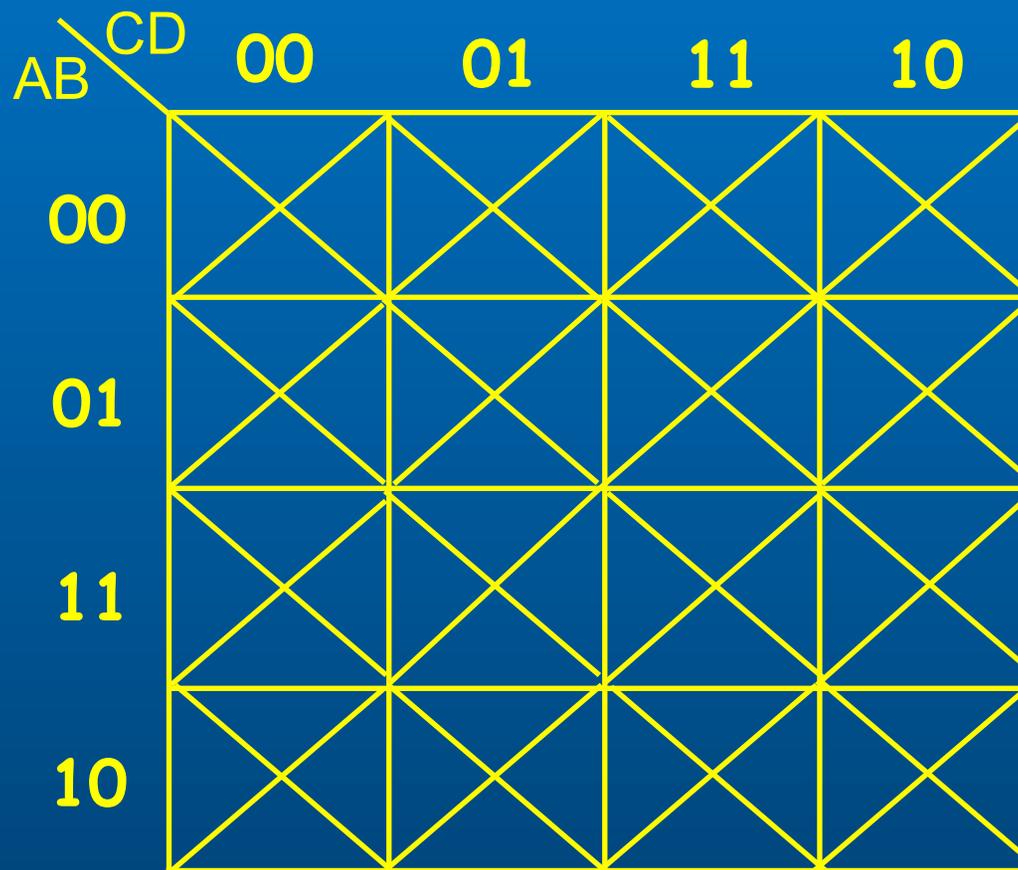
# MAPA DE KARNAUGH

## Para 6 Variáveis

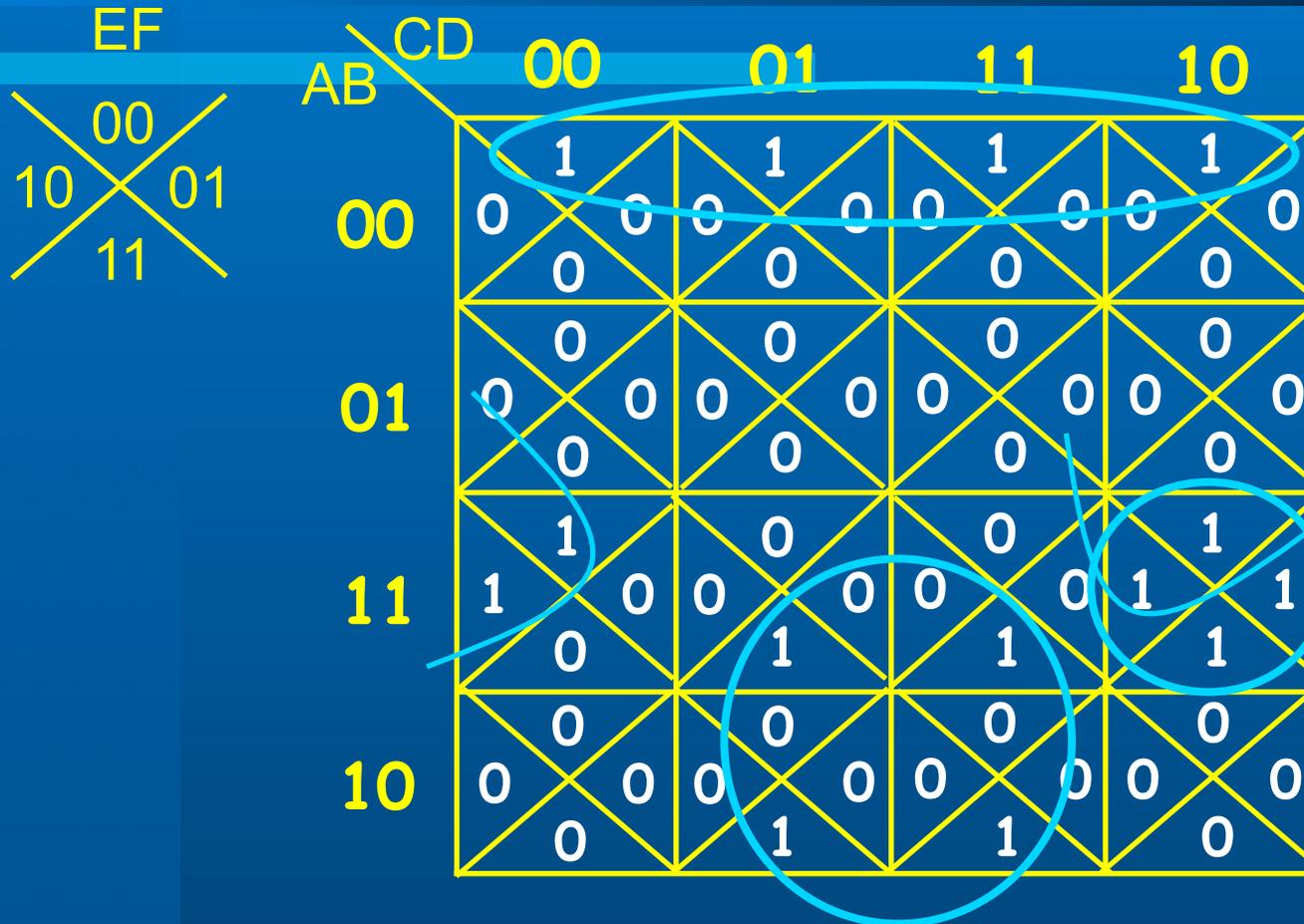
- O mapa final pode ser visualizado como sendo quatro mapas de quatro variáveis sobrepostos. Um dos mapas, referente à  $EF=00$ , corresponde à parte superior das células do mapa final. O outro mapa, referente à  $EF=01$ , corresponde à parte esquerda das células do mapa final. O terceiro mapa, referente à  $EF=10$ , corresponde à parte direita das células do mapa final. Finalmente, o último mapa, referente à  $EF=11$ , corresponde à parte inferior das células do mapa final.
- Cada mapa apresenta a sua leitura individual. Se a leitura em um dos mapas for igual (sobreposta) à leitura de outro mapa vizinho, estas duas leituras formam uma única leitura. Por mapa vizinho, entende-se aquele que tenha somente uma variável diferente. Assim, como exemplo, os vizinhos de  $EF=10$  são  $EF=11$  e  $EF=00$ . Da mesma forma, se as leituras dos quatro mapas estiverem sobrepostas, estas formam uma única leitura.

# MAPA DE KARNAUGH

Para 6 Variáveis



# MAPA DE KARNAUGH



$$S = \overline{A}\overline{B}EF + ADEF + ABC\overline{D} + AB\overline{D}\overline{F}$$

# MAPA DE KARNAUGH

## Condição Irrelevante

- Condições de entrada para as quais não existem níveis de saída especificados;
- Condições de entrada que nunca ocorrerão

A	B	C	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	x
1	0	0	x
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

} "don't  
care"

(a)

# MAPA DE KARNAUGH Condição Irrelevante

- Utiliza-se “x” como “0” ou “1” convenientemente, de modo à tornar a expressão mais simples;

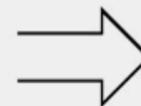
A	B	C	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	x
1	0	0	x
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

} "don't care"

(a)

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	x
AB	1	1
$A\bar{B}$	x	1

(b)



	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	0
AB	1	1
$A\bar{B}$	1	1

z = A

(c)

# MAPA DE KARNAUGH – Exemplos de “don't care”

AB \ C	00	01	11	10
0	X	0	1	1
1	0	0	1	1

$V_A$

AB \ C	00	01	11	10
0	X	1	0	0
1	0	0	0	0

$V_B$

AB \ C	00	01	11	10
0	X	0	0	0
1	1	1	0	0

$V_C$

$$V_A = A$$

$$V_B = \bar{A}\bar{C}$$

$$V_C = \bar{A}C$$

## Exercício 4

- **Projetar um circuito lógico para controle da porta de um elevador;**
- **Sinal “M” indica se o elevador está parado ( $M=0$ ) ou se movendo ( $M=1$ );**
- **Os sensores F1 e F2 indicam se o elevador está passando pelo andar correspondente (1) ou não (0);**
- **A porta se abre se a saída do circuito for 1.**

# MAPA DE KARNAUGH – Exemplo de projeto

M	F1	F2	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	x
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	x

MF1 \ F2	0	1
00	0	1
01	1	x
11	0	x
10	0	0

$$S = \bar{M}(F1 + F2)$$



FIM